Bab 5

Integral dalam Ruang Dimensi-3

TUJUAN PEMBELAJARAN

Agar pembaca memahami apa yang disebut dengan Integral Lipat Dua atas Persegipanjang dan bukan Persegipanjang, selanjutnya dapat memahami penggunaan Integral Lipat Dua untuk menghitung Volume Bidang Empat, Massa suatu Benda dan Pusat Massa suatu Benda

OUTCOME PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Memahami dan mampu menyelesaikan Integral Lipat Dua atas Persegipanjang dan Bukan Persegipanjang

2. Memahami dan mampu menggunakan Integral Lipat Dua untuk menentukan Volume Bidang Empat, Massa Suatu Benda, Pusat massa suatu benda

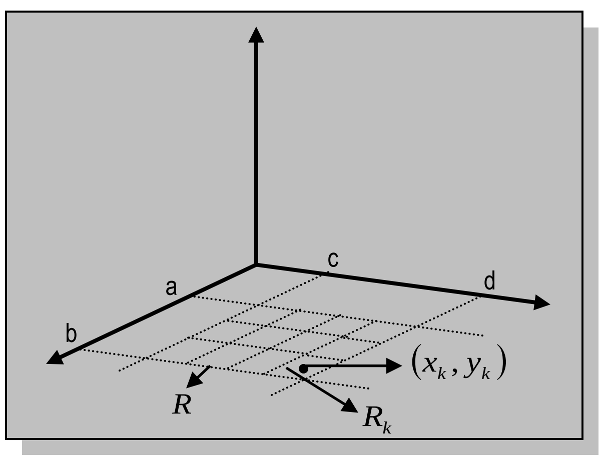
5.1. Integral Lipat Dua atas Persegipanjang

Adalah Henry Lebesque yang menyumbang tentang pengintegralan dalam dimensi satu dan dimensi n yang dikenal dengan ***Integral Lebesque*** yaitu yang memberikan sumbangan pada integral Riemann.

Integral Riemann untuk fungsi satu peubah yang telah kita pelajari adalah dalam interval $[a,b]$ dibagi menjadi n buah partisi P yang panjangnya Δx_k , dimana $k = 1,2,3...n$, jika kita mengambil suatu titik c_k dari sub interval ke- k , maka menurut Riemann didefinisikan :

$$\int_a^b f(x)dx = \underset{[P]\to 0}{Lim} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Diketahui R suatu persegipanjang dengan sisi-sisi sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat, misalkan $R = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$ jika dibuat partisi P dari R dengan cara membuat garis-garis yang sejajar dengan sumbu x dan sumbu y seperti Gambar 6.1.

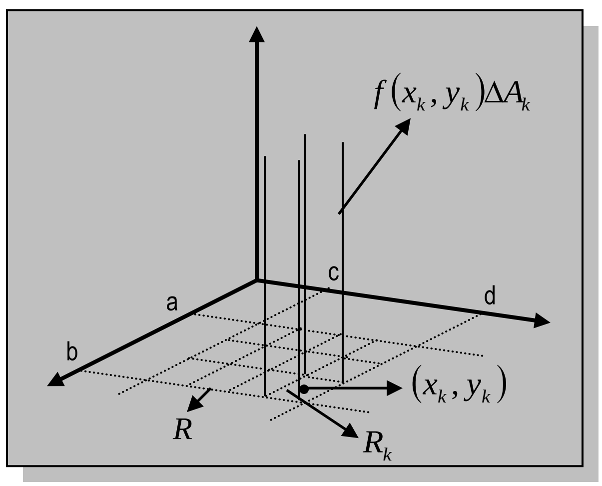


Gambar 5.1. Pembagian Daerah R

Terlihat daerah R dengan batas $R = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$ dibagi menjadi n buah partisi yang berbentuk persegipanjang kecil yaitu R_k dimana $k = 1,2,3,.....n$, jika kita mengambil satu buah partisi yaitu R_k yang panjang sisinya Δx_k dan Δy_k, maka luas partisi R_k adalah $\Delta A_k = \Delta x_k . \Delta y_k$, jika didalam ΔA_k kita mengambil sebuah titik yaitu (x_k, y_k) kemudian kita substitusikan kedalam fungsinya yaitu $z = f(x, y)$, maka diperoleh tinggi satu buah partisi yaitu $z = f(x_k, y_k)$, sehingga volume satu buah partisi diperoleh $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ karena semuanya terdapat n buah partisi, maka menurut penjumlahan Riemann diperoleh :

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

Seperti pada Gambar 5.2



Gambar 5.2. Volume satu partisi

Definisi Integral Lipat Dua :

Andaikan $f(x, y)$ suatu fungsi dua variable bebas yang terdefinisi pada suatu persegi panjang tertutup R, jika :

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

Ada, kita katakana $f(x,y)$ dapat diintegralkan pada R, lebih lanjut integral yang dituliskan $\iint_R f(x,y)dA$ yang disebut Integral Lipat Dua $f(x,y)$ pada R diberikan :

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

Seperti halnya integral lipat satu, yaitu jika $f(x) \geq 0$, maka $\int_a^b f(x)dx$ menyatakan luas daerah dibawah kurva $y = f(x)$ dalam interval $[a,b]$, dalam integral lipat dua juga menyatakan hal yang sama, jika $f(x,y) \geq 0$ maka $\iint_R f(x,y)dA$ menyatakan Volume benda pejal di bawah permukaan $z = f(x,y)$ dan di atas persegi panjang R.

Sifat-Sifat Integral Lipat Dua :

1. Integral lipat dua adalah linier
   a. $\iint_R kf(x,y)dA = k\iint_R f(x,y)dA$
   b. $\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$

2. Integral lipat dua adalah aditif pada persegi panjang yang saling melengkapi hanya pada suatu ruas garis
   a. $\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$
3. Sifat pembandingan berlaku, jika $f(x,y) \leq g(x,y)$ untuk semua (x,y) di R, maka
   a. $\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA$
4. jika $f(x,y) = 1$ pada R, maka integral lipat dua merupakan luas daerah R
   a. $\iint_R kdA = k\iint_R 1dA = kA(R)$

Contoh 5.1 :

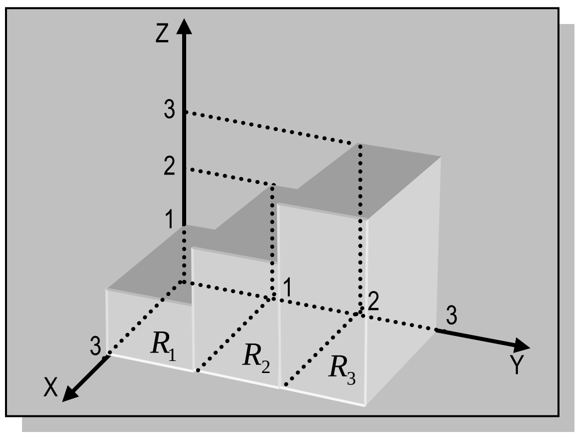
Andaikan $f(x,y)$ berupa fungsi tangga yaitu :

$$f(x,y) = \begin{matrix} 1 & 0 \le x \le 3, 0 \le y < 1 \\ 2 & 0 \le x \le 3, 1 \le y < 2 \\ 3 & 0 \le x \le 3, 2 \le y < 3 \end{matrix}$$

Hitung $\iint_R f(x,y)dA$ dengan $R = (x,y) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3$

Penyelesaian 5.1 :

Jika fungsi $f(x,y)$ kita gambar, maka seperti Gambar 5.3



Gambar 5.3. Fungsi Tangga

Diketahui ada tiga daerah persegi panjang, yaitu :

- $R_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$
- $R_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 3, 1 \le y \le 2\}$
- $R_3 = \{(x,y) : 0 \le x \le 3, 2 \le y \le 3\}$

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA + \iint_{R_3} f(x,y)dA$$
$$= 1.A(R_1) + 2.A(R_2) + 3.A(R_3)$$
$$= 1.(3*1) + 2.(3*1) + 3.(3*1)$$

$$= 1.(3) + 2.(3) + 3.(3)$$
$$= 18$$

Contoh 5.2 :

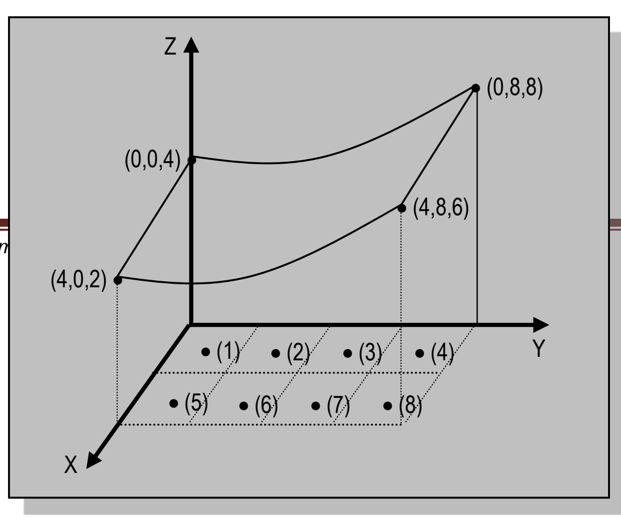
Tentukan $\iint_R f(x,y)dA$ jika diketahui $f(x,y) = \dfrac{64 - 8x + y^2}{16}$ dimana $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 8\}$

Penyelesaian 5.2 :

Jika daerah R kita bagi menjadi delapan buah bujur sangkar yang sama, dengan sebuah titik tengah (x_k, y_k) yaitu :

1. $R_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$, dengan titik tengah $(x_1, y_1) = (1,1)$
2. $R_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, 2 \le y \le 4\}$, dengan titik tengah $(x_2, y_2) = (1,3)$
3. $R_3 = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, 4 \le y \le 6\}$, dengan titik tengah $(x_3, y_3) = (1,5)$
4. $R_4 = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, 6 \le y \le 8\}$, dengan titik tengah $(x_4, y_4) = (1,7)$
5. $R_5 = \{(x,y) : 2 \le x \le 4, 0 \le y \le 2\}$, dengan titik tengah $(x_5, y_5) = (3,1)$
6. $R_6 = \{(x,y) : 2 \le x \le 4, 2 \le y \le 4\}$, dengan titik tengah $(x_6, y_6) = (3,3)$
7. $R_7 = \{(x,y) : 2 \le x \le 4, 4 \le y \le 6\}$, dengan titik tengah $(x_7, y_7) = (3,5)$
8. $R_8 = \{(x,y) : 2 \le x \le 4, 6 \le y \le 8\}$, dengan titik tengah $(x_8, y_8) = (3,7)$

Jika ke delapan daerah bujur sangkar kita gambar, maka seperti Gambar 5.4



Untuk melakukan penjumlahan Riemann, maka titik tengah (x_k, y_k) kita substitusikan ke dalam fungsi $f(x,y) = \dfrac{64 - 8x + y^2}{16}$ untuk memperoleh tinggi masing-masing balok yang alasnya berbentuk bujur sangkar, diperoelh :

1. $(x_1, y_1) = (1{,}1) \Rightarrow f(x_1, y_1) = \dfrac{64 - 8(1) + (1)^2}{16} = \dfrac{64 - 8 + 1}{16} = \dfrac{57}{16}$
2. $(x_2, y_2) = (1{,}3) \Rightarrow f(x_2, y_2) = \dfrac{64 - 8(1) + (9)^2}{16} = \dfrac{64 - 8 + 9}{16} = \dfrac{65}{16}$
3. $(x_3, y_3) = (1{,}5) \Rightarrow f(x_3, y_3) = \dfrac{64 - 8(1) + (5)^2}{16} = \dfrac{64 - 8 + 25}{16} = \dfrac{81}{16}$
4. $(x_4, y_4) = (1{,}7) \Rightarrow f(x_4, y_4) = \dfrac{64 - 8(1) + (7)^2}{16} = \dfrac{64 - 8 + 49}{16} = \dfrac{105}{16}$
5. $(x_5, y_5) = (3{,}1) \Rightarrow f(x_5, y_5) = \dfrac{64 - 8(3) + (1)^2}{16} = \dfrac{64 - 24 + 1}{16} = \dfrac{41}{16}$
6. $(x_6, y_6) = (3{,}3) \Rightarrow f(x_6, y_6) = \dfrac{64 - 8(3) + (3)^2}{16} = \dfrac{64 - 24 + 9}{16} = \dfrac{49}{16}$
7. $(x_7, y_7) = (3{,}5) \Rightarrow f(x_7, y_7) = \dfrac{64 - 8(3) + (5)^2}{16} = \dfrac{64 - 24 + 25}{16} = \dfrac{65}{16}$
8. $(x_8, y_8) = (3{,}7) \Rightarrow f(x_8, y_8) = \dfrac{64 - 8(3) + (7)^2}{16} = \dfrac{64 - 24 + 49}{16} = \dfrac{89}{16}$

Sehingga menurut Sifat penjumlahan diperoleh :

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \sum_{k=1}^{8} \iint_{R_k} f(x_k, y_k)\,dA$$

$$= \iint_{R_1} f(x_1, y_1)dA + \iint_{R_2} f(x_2, y_2)dA + \iint_{R_3} f(x_3, y_3)dA +$$
$$\iint_{R_4} f(x_4, y_4)dA + \iint_{R_5} f(x_5, y_5)dA + \iint_{R_6} f(x_6, y_6)dA +$$
$$\iint_{R_7} f(x_7, y_7)dA + \iint_{R_8} f(x_8, y_8)dA$$
$$= \iint_{R_1} \frac{57}{16} dA + \iint_{R_2} \frac{65}{16} dA + \iint_{R_3} \frac{81}{16} dA + \iint_{R_4} \frac{105}{16} dA + \iint_{R_5} \frac{41}{16} dA +$$
$$\iint_{R_6} \frac{49}{16} dA + \iint_{R_7} \frac{65}{16} dA + \iint_{R_8} \frac{89}{16} dA$$
$$= \frac{57}{16} A(R_1) + \frac{65}{16} A(R_2) + \frac{81}{16} A(R_3) + \frac{105}{16} A(R_4) +$$
$$\frac{41}{16} A(R_5) + \frac{49}{16} A(R_6) + \frac{65}{16} A(R_7) + \frac{89}{16} A(R_8)$$

Karena
$A(R_1) = A(R_2) = A(R_3) = A(R_4) = A(R_5) = A(R_6) = A(R_7) = A(R_8) = 4$
Maka integral di atas dapat ditulis menjadi :

$$= \frac{4}{16}(57 + 65 + 81 + 105 + 41 + 49 + 65 + 89) = \frac{4}{16}(552)$$
$$\iint_R f(x, y)dA = 138$$

5.1.1. Soal-Soal Latihan

A. Diketahui $R = \{(x, y): 1 \le x \le 4, 0 \le y \le 2\}$ hitunglah $\iint_R f(x, y)dA$ dengan fungsi $f(x, y)$ sebagai berikut :

1. $f(x, y) = \begin{cases} 2 & 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2 \\ 3 & 3 \le x \le 4, 0 \le y \le 2 \end{cases};$

2. $f(x, y) = \begin{cases} -1 & 1 \le x \le 4, 0 \le y \le 1 \\ 2 & 1 \le x \le 4, 1 \le y \le 2 \end{cases};$

3. $f(x, y) = \begin{cases} 2 & 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 1 \\ 1, & 1 \le x \le 3, 1 \le y \le 2 \\ 3 & 3 \le x \le 4, 0 \le y \le 2 \end{cases}$

4. $f(x, y) = \begin{cases} 2 & 1 \le x \le 4, 0 \le y \le 1 \\ 3, & 1 \le x \le 3, 1 \le y \le 2 \\ 1 & 3 \le x \le 4, 1 \le y \le 2 \end{cases}$

B. Diketahui $R = \{(x, y): 0 \le x \le 6, 0 \le y \le 4\}$ dan P adalah partisi dari R menjadi enam bujursangkar yang sama oleh garis $x = 2$, $x = 4$ dan $y = 2$, hitung nilai pendekatan dari $\iint_R f(x, y)dA$ dengan menghitung penjumlahan Riemann dengan menganggap titik

(x_k, y_k) sebagai titik tengah bujur sangkar, jika $f(x,y)$ sebagai berikut :

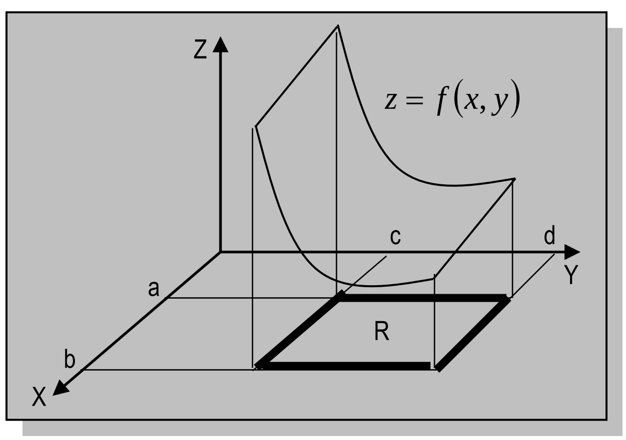
1. $f(x,y) = 12 - x - y$
2. $f(x,y) = 10 - y^2$
3. $f(x,y) = x^2 + 2y^2$
4. $f(x,y) = 2 + x + 2y$

5.2. Integral Lipat

Untuk menghitung masalah $\iint_R f(x,y)dA$ dengan R berupa persegipanjang yaitu :

$$R = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

Jika kita asumsikan bahwa $f(x,y) \ge 0$ pada R sehingga kita dapat menafsirkan integral lipat dua sebagai Volume dari benda pejal di bawah permukaan, seperti pada Gambar 6.3



Gambar 5.5. Volume Benda Pejal di Bawah Permukaan

Volume benda pejal di bawah permukaan didefinisikan sebagai berikut :

$$V = \iint_R f(x,y)dA$$

Dengan kata lain bahwa volume benda pejal seperti Gambar 5.5 dapat ditentukan dengan integral lipat dua yaitu :

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

Atau dapat kita tulis :

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$$

Contoh 5.3 :

Tentukan integral berikut $\int_0^3 \int_1^2 (2x+3y)\,dxdy =$

Penyelesaian 5.3 :

Pada integral di atas, cara pengintegralan yang pertama (di dalam kurung) dengan menganggap variable y sebagai konstanta, sehingga integral lipat di atas dapat diselesaikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_1^2 (2x+3y)\,dxdy &= \int_0^3 \left[\int_1^2 (2x+3y)\,dx \right] dy \\
&= \int_0^3 \left[x^2 + 3yx \Big|_1^2 \right] dy \\
&= \int_0^3 \left(2^2 + 3y(2)\right) - \left(1^2 + 3y(1)\right) dy \\
&= \int_0^3 (4+6y) - (1+3y)\,dy \\
&= \int_0^3 (3+3y)\,dy
\end{aligned}$$

$$= 3y + \frac{3}{2}y^2 \Big|_0^3$$

$$= \left(3(3) + \frac{3}{2}(3)^2\right) - \left(3(0) + \frac{3}{2}(0)^2\right)\Big|$$

$$= 9 + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{45}{2}$$

Sehingga $\int_0^3 \int_1^2 (2x + 3y)\,dxdy = \frac{45}{2}$

Contoh 5.4 :

Tentukan Integral berikut $\int_0^8 \int_0^4 \frac{1}{16}\left(64 - 8x + y^2\right)dxdy =$

Penyelesaian 5.4 :

Pada integral di atas, cara pengintegralan yang pertama (di dalam kurung) dengan menganggap variable y sebagai konstanta, sehingga integral lipat di atas dapat diselesaikan sebagai berikut

$$\int_0^8 \int_0^4 \frac{1}{16}\left(64 - 8x + y^2\right)dxdy = \int_0^8 \left[\int_0^4 \frac{1}{16}\left(64 - 8x + y^2\right)dx\right]dy$$

$$= \int_0^8 \left[\frac{1}{16}\left(64x - 4x^2 + y^2 x\right)\Big|_0^4\right]dy$$

$$= \int_0^8 \left[\left(\frac{1}{16}\left(64(4) - 4(4)^2 + y^2(4)\right) - (0)\right)\right]dy$$

$$= \int_0^8 \left(16 - 4 + \frac{1}{4}y^2\right)dy$$

$$= \int_0^8 \left(12 + \frac{1}{4} y^2 \right) dy$$

$$= 12y + \frac{1}{12} y^3 \Big|_0^8$$

$$= \left(12(8) + \frac{1}{12} (8)^3 \right)$$

$$= 96 + \frac{512}{12}$$

$$= 138 \frac{2}{3}$$

Sehingga $\int_0^8 \int_0^4 \frac{1}{16} \left(64 - 8x + y^2\right) dxdy = 138 \frac{2}{3}$

Contoh 5.5 :

Tentukan Volume dari benda pejal yang dibatasi oleh $z = 4 - x^2 - y$ dan di bawah oleh persegipanjang $R = \{(x, y); 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 2\}$

Penyelesaian 5.5 :

Volume benda pejal tersebut adalah :

$$V = \iint_R z dxdy = \int_0^2 \left[\int_0^1 \left(4 - x^2 - y\right) dx \right] dy$$

$$= \int_0^2 \left[4x - \frac{1}{3} x^3 - yx \Big|_0^1 \right] dy$$

$$= \int_0^2 \left[\left(4(1) - \frac{1}{3} (1)^3 - (1) y \right) - \left(4(0) - \frac{1}{3} (0)^3 - (0) y \right) \right] dy$$

$$= \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{3} - y \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{11}{3} - y \right) dy$$

$$= \frac{11}{3}y - \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{11}{3}(2) - \frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{11}{3}(0) - \frac{1}{2}(0)^2\right)$$

$$= \left(\frac{22}{3} - \frac{4}{2}\right)$$

$$= \frac{44-12}{6}$$

$$= \frac{32}{6}$$

Sehingga Volume benda yang dibatasi oleh $z = 4 - x^2 - y$ dan di bawah persegipanjang $R = \{(x, y); 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 2\}$ adalah $\frac{32}{2}$

5.2.1. Soal-Soal Latihan

A. Hitung Integral di bawah ini :

1. $\int_0^2 \int_1^3 x^2 y\,dxdy$
2. $\int_{-1}^4 \int_1^2 (x + y^2)\,dxdy$
3. $\int_1^2 \int_0^3 (xy + y^2)\,dxdy$
4. $\int_{-1}^1 \int_1^2 (x^2 + y^2)\,dxdy$
5. $\int_1^2 \int_1^3 (2 + 2x + y^2)\,dxdy$
6. $\int_1^3 \int_{-1}^2 (3x^2 - 3y)\,dxdy$
7. $\int_0^1 \int_0^1 (2y + x)\,dxdy$
8. $\int_{-1}^2 \int_1^2 (x + 1 + 3y^2)\,dxdy$
9. $\int_1^2 \int_1^2 (3x + 3y)\,dxdy$
10. $\int_{-1}^0 \int_2^3 (2 - x^2 - y^2)\,dxdy$

B. Hitung Integral Lipat Dua yang ditunjukan atas R di bawah ini

1. $\iint_R xy^3\,dA$, $R = ((x, y); 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1)$
2. $\iint_R (x^2 + y^2)\,dA$, $R = ((x, y); -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2)$

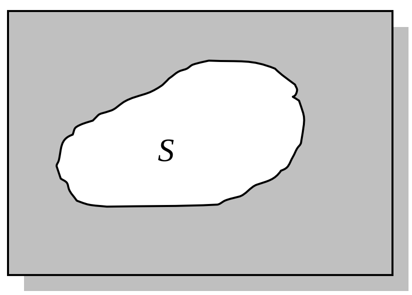
3. $\iint_R xy\sqrt{1+x^2}\,dA$, $R = ((x, y); 0 \le x \le \sqrt{3}, 1 \le y \le 2)$
4. $\iint_R (2 - x - y)\,dA$, $R = ((x, y); 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1)$
5. $\iint_R (4 - y^2)\,dA$, $R = ((x, y); 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2)$

C. Tentukan Volume benda pejal dibawah bidang :

1. $z = x + y + 1$ atas $R = ((x, y); 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 3)$
2. $z = 2x + 3y$ atas $R = ((x, y); 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 4)$

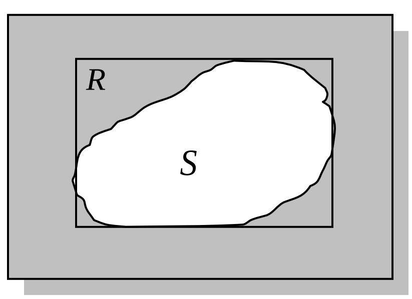
5.3. Integral Lipat Dua atas Daerah Bukan Persegipanjang

Misalkan ada suatu himpunan tertutup S dan terbatas di bidang seperti Gambar 5.6 berikut :



Gambar 5.6. Himpunan Tertutup S

Himpunan tertutup S dikelilingi oleh persegi panjang R dengan sisi-sisinya sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat seperti Gambar 5.7



Gambar 5.7. Himpunan R atas S

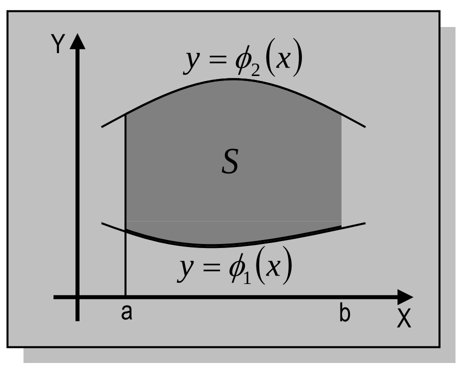
Andaikan $f(x,y)$ terdefinisi pada S dan didefinisikan $f(x,y)=0$ pada bagian R diluar S kita katakan f dapat diintegralkan pada S jika ia dapat diintegralkan pada R dan berlaku :

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA$$

Misalkan terdapat himpunan S sederhana dimana $\phi_1(x)$ dan $\phi_2(x)$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu pada interval $[a,b]$ yang didefinisikan sebagai berikut :

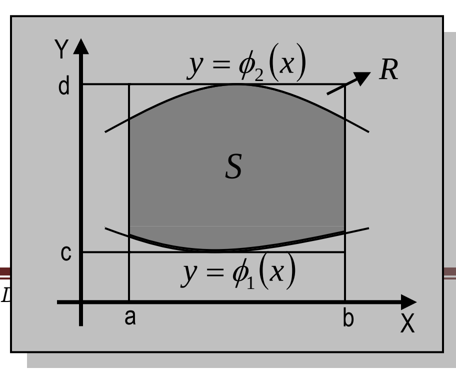
$$S = \{(x,y) : \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), a \le x \le b\}$$

Jika kita gambar himpunan S tersebut seperti Gambar 5.8



Gambar 5.8. Himpunan S dibatasi oleh y sederhana

Jika kita ingin menghitung integral lipat dua dari suatu fungsi $f(x,y)$ atau suatu himpunan S yang y sederhana, maka kita lakukan melingkungi S dalam suatu persegi panjang R dan membuat $f(x,y)=0$ diluar S seperti Gambar 5.9



Gambar 5.9. Persegipanjang R melingkungi S

Dengan demikian integral lipat dua dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\iint_S f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

Secara singkat integral lipat dua untuk himpunan S adalah :

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$$

Contoh 5.6 :

Hitung integral lipat dua berikut : $\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} (4x+10y)dydx$

Penyelesaian 5.6 :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} (4x+10y)dydx &= \int_0^1 \left[4xy+5y^2\right]_{-x}^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 \left(4x(x^2)+5(x^2)^2\right)-\left(4x(-x)+5(-x)^2\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(4x^3+5x^4\right)-\left(-4x^2+5x^2\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(4x^3+5x^4-x^2\right)dx \\
&= x^4+x^5-\frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 \\
&= 1^4+1^5-\frac{1}{3}(1)^3 = 1+1-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

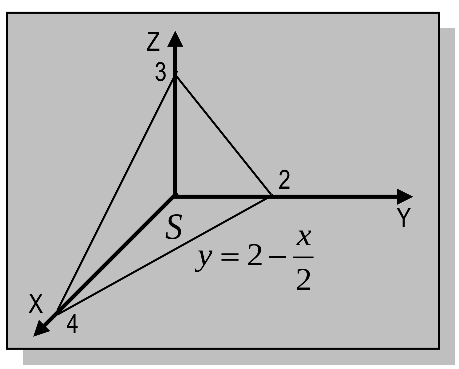
$$\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} (4x + 10y)\, dy\, dx = \frac{5}{3}$$

Contoh 5.7 :

Gunakan integral lipat dua untuk menentukan volume bidang empat yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang $3x + 6y + 4z - 12 = 0$

Penyelesaian 5.7 :

Daerah segitiga di bidang yang membentuk alas bidang empat sebagai S, kita akan mencari Volume benda pejal di bawah permukaan $z = \frac{1}{4}(12 - 3x - 6y)$ dan di atas daerah S, bidang yang diberikan memotong bidang xy pada garis $y = \frac{1}{6}(12 - 3x)$ dan garis $x = \frac{1}{3}(12 - 6y)$, jika kita gambar maka bidang empat tersebut seperti pada Gambar 5.10



Gambar 5.10. Volume Benda Pejal di Atas Daerah S

Diketahui batas S meliputi batas x yaitu $[0,4]$, batas y adalah $\left[0, 2 - \frac{x}{2}\right]$ sedangkan fungsinya adalah $z = \frac{1}{4}(12 - 3x - 6y)$ sehingga volume benda pejal tersebut adalah :

$$\Rightarrow \quad V = \iint_S Z\,dA$$

$$\Rightarrow \quad = \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} \frac{1}{4}(12-3x-6y)\,dy\,dx$$

$$\Rightarrow \quad = \int_0^4 \left[3y - \frac{3}{4}xy - \frac{3}{4}y^2\right]_0^{2-\frac{x}{2}} dx$$

$$\Rightarrow \quad = \int_0^4 \left[3\left(2-\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{4}x\left(2-\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{4}\left(2-\frac{x}{2}\right)^2\right] dx$$

$$\Rightarrow \quad = \int_0^4 \left[6 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - 3 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{16}x^2\right] dx$$

$$\Rightarrow \quad = \int_0^4 \left[3 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{16}x^2\right] dx$$

$$\Rightarrow \quad = 3x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{48}x^3 \Big|_0^4$$

$$\Rightarrow \quad = 3(4) - \frac{3}{4}(4)^2 + \frac{3}{48}(4)^3 = 12 - 12 + \frac{192}{48}$$

$$\Rightarrow \quad V = 4$$

Contoh 5.8 :

Hitung Integral Lipat dua yang diberikan dengan mengubahnya ke suatu integral lipat $\iint_S (x^2 - xy)\,dA$, S adalah daerah antara $y = x$ dan $y = 3x - x^2$

Penyelesaian 5.8 :

Untuk menentukan daerah S didapat $3x - x^2 = x$ diperoleh batas nilai x, yaitu :

$\Rightarrow \; 3x - x^2 = x$

$\Rightarrow\ 3x - x - x^2 = 0$

$\Rightarrow\ 2x - x^2 = 0$

$\Rightarrow\ x(2-x) = 0$ diperoleh nilai $x = 0$ dan $x = 2$, sehingga himpunan daerah S adalah

$S = \{(x, y), 0 \le x \le 2, x \le y \le 3x - x^2\}$ sehingga integralnya sebagai berikut :

$$\Rightarrow \iint_S \left(x^2 - xy\right) dA = \int_0^2 \int_x^{3x-x^2} \left(x^2 - xy\right) dy dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 y - \frac{1}{2} xy^2 \right]_x^{3x-x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \left(\left(x^2(3x - x^2) - \frac{1}{2} x(3x - x^2)^2 \right) - \left(x^2(x) - \frac{1}{2} x(x)^2 \right) \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(\left(3x^3 - x^4 - \frac{9}{2} x^3 + 3x^4 - \frac{1}{2} x^5 \right) - \left(\frac{1}{2} x^3 \right) \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(-2x^3 + 2x^4 - \frac{1}{2} x^5 \right) dx$$

$$= \frac{-2}{4} x^4 + \frac{2}{5} x^5 - \frac{1}{12} x^6 \Big|_0^2$$

$$= \left(-\frac{2}{4}(2)^4 + \frac{2}{5}(2)^5 - \frac{1}{12}(2)^6 \right) - \left(-\frac{2}{4}(0)^4 + \frac{2}{5}(0)^5 - \frac{1}{12}(0)^6 \right)$$

$$= \left(-\frac{2}{4}(16) + \frac{2}{5}(32) - \frac{1}{12}(64) \right)$$

$$= \left(-8 + \frac{64}{5} - \frac{64}{12} \right) = \left(-8 + \frac{64}{5} - \frac{16}{3} \right) = -\frac{120}{15} + \frac{192}{15} - \frac{80}{15}$$

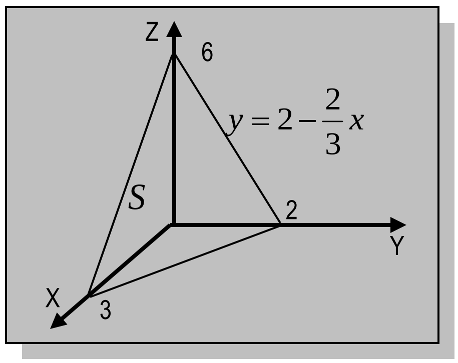
$$\iint_S \left(x^2 - xy\right) dA = -\frac{8}{15}$$

Contoh 5.9 :

Tentukan Volume benda pejal yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang yang mempunyai persamaan $z = 6 - 2x - 3y$

Penyelesaian 5.8 :

Diketahui batas S meliputi batas x yaitu $0 \le x \le 3$, yang didapat jika $y = 0$ dan $z = 0$, sedangkan batas y adalah $0 \le y \le 2 - \frac{2}{3}x$ yang diperoleh jika $z = 0$, sedangkan fungsinya adalah $z = 6 - 2x - 3y$ jika kita gambar pada sistem koordinat, maka benda pejal tersebut seperti pada Gambar 5.11 dan volumenya sebagai berikut :



Gambar 5.11. Benda Pejal di Atas Daerah S

$$\Rightarrow \quad V = \iint_S Z\,dA$$

$$= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} (6 - 2x - 3y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \left(6y - 2xy - \frac{3}{2}y^2 \right)_0^{2-\frac{2}{3}x} dx$$

$$= \int_0^3 \left(6(2 - \frac{2}{3}x) - 2x(2 - \frac{2}{3}x) - \frac{3}{2}(2 - \frac{2}{3}x)^2 \right) - (0)\,dx$$

$$= \int_0^3 \left(12 - 4x - 4x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{3}{2}(4 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{9}x^2) \right) dx$$

$$= \int_0^3 \left(12 - 4x - 4x + \frac{4}{3}x^2 - 6 + 4x - \frac{2}{3}x^2 \right) dx$$

$$= \int_0^3 \left(6 - 4x + \frac{2}{3}x^2 \right) dx$$

$$= 6x - 2x^2 + \frac{2}{9}x^3 \Big|_0^3$$

$$= 6(3) - 2(3)^2 + \frac{2}{9}(3)^3 = 18 - 18 + 6$$

$$\Rightarrow \quad V = 6$$

5.3.1. Soal-Soal Latihan

A. Hitung Integral Lipat Berikut Ini

1. $\int_0^1 \int_0^{3x} x^2 dydx$
2. $\int_{-1}^3 \int_0^{3x} \left(x^2 + y^2\right) dydx$
3. $\int_0^1 \int_{x^2}^1 (x + y) dydx$
4. $\int_1^2 \int_0^{x-1} ydydx$
5. $\int_{-3}^1 \int_0^{x} \left(x^2 - y^3\right) dydx$
6. $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3 dydx$

B. Hitung Integral Lipat Dua yang diberikan berikut ini

1. $\iint_S 2xydA$, S adalah daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 1$
2. $\iint_S (x + y) dA$, S adalah daerah segitiga dengan titik-titik $(0,0), (4,0)$ dan $(4,1)$
3. $\iint_S \left(x^2 + 2y\right) dA$, S adalah daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = x$
4. $\iint_S \left(x^2 - xy\right) dA$, S adalah daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 + 3x$ dan $y = x$

5. $\iint_S (x+3y)dA$, S adalah daerah segitiga dengan titik-titik

$(0,0), (2,0)$ dan $(2,2)$

C. Tentukan Volume Benda Pejal dengan Integral Lipat Dua yang dibatasi oleh :

1. Bidang empat yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang $z = 8 - 2x - 4y$
2. Bidang empat yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang $3x + 4y + z - 12 = 0$
3. Bidang empat yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang $x - y + z = 8$

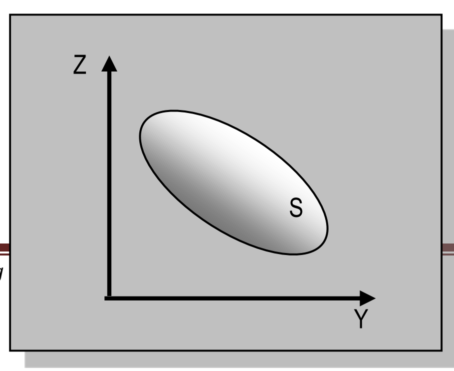
5.4. Penerapan Integral Lipat Dua

Penerapan Integral Lipat dua yang paling jelas adalah untuk menentukan volume benda pejal seperti yang telah dibahas, penerapan lainnya adalah untuk menentukan massa suatu benda yang tak homogeny serta letak pusat massa sebuah benda yang tidak homogen.

Benda yang tak homogen adalah benda yang mempunyai kerapanya berubah-ubah atau tidak konstan, dimana kerapatan di setiap titik berbeda, artinya kerapatan di titik A berbeda dengan kerapatan di titik B, secara matematis maka kerapatan yang berubah-ubah itu dirumuskan sebagai fungsi yang mempunyai variable

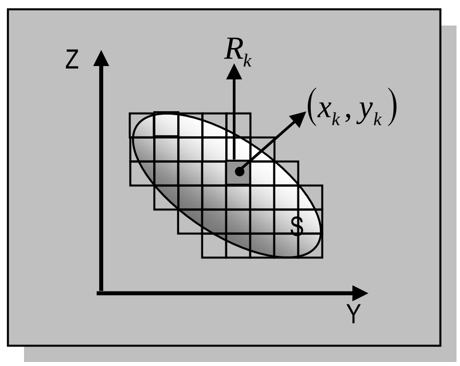
5.4.1. Massa

Andaikan suatu benda yang mencakup daerah S di bidang xy dan andaikan kerapatan (massa per satuan luas) di (x, y) dinyatakan oleh $\delta(x, y)$ seperti pada Gambar 5.12



Gambar 5.12. Benda Tak Homogen

Untuk mempermudah, maka benda tak homogen dalam Gambar 5.12 dibagi-bagi atau dibuat partisi-partisi berupa persegipanjang kecil-kecil misalnya $R_1, R_2, R_3, ...R_k$ seperti pada Gambar 5.13



Gambar 5.13. Partisi atas Daerah S

Kemudian kita ambil satu titik yaitu (x_k, y_k) yang terletak di dalam salah satu partisi yaitu partisi R_k, maka massa dari R_k adalah $\delta(x_k, y_k)A(R_k)$ yaitu kerapatan di titik (x_k, y_k) dalam partisi R_k dikali luas partisi R_k, sehingga massa total benda tersebut didekati oleh $m \approx \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k, y_k)A(R_k)$, dimana massa sebenarnya, m diperoleh dengan mengambil limit dari rumus di atas untuk norma partisi mendekati nol, sehingga menurut teorema diperoleh integral lipat dua yaitu :

$$\boxed{m = \iint_S \delta(x_k, y_k)\,dA}$$

Contoh 5.10 :

Sebuah benda tak homogen (lamina) mempunyai kerapatan $\delta(x,y)=xy$, lamina tersebut dibatasi oleh sumbu x, garis $x=0$ dan garis $x=1$ serta kurva $y=x+1$, tentukan massa totalnya.

Penyelesaian 5.10 :

Dari soal di atas, berarti lamina tersebut di batasi oleh batas x dari $x=0$ sampai $x=1$, serta batas y dari $y=0$ sampai $y=x+1$ sehingga massa total lamina tersebut adalah :

$$\Rightarrow m=\iint_S \delta(x,y)dA=\int_0^1\int_0^{x+1}(xy)dydx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}xy^2\right)\Big|_0^{x+1}dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x(x+1)\right)-\left(\frac{1}{2}x(0)\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{6}(1)^3+\frac{1}{4}(1)^2=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow m=\iint_S \delta(x,y)dA=\frac{10}{24}$$

Contoh 5.11 :

Sebuah benda tak homogen (lamina) mempunyai kerapatan $\delta(x,y)=x-y$, lamina tersebut dibatasi oleh sumbu x, garis $x=0$ dan garis $x=1$ serta kurva $y=x^2$, tentukan massa totalnya.

Penyelesaian 5.11 :

Dari soal di atas, berarti lamina tersebut di batasi oleh batas x dari $x=0$ sampai $x=1$, serta batas y dari $y=0$ sampai $y=x^2$ sehingga massa total lamina tersebut adalah :

$$\Rightarrow m = \iint_S \delta(x,y)dA = \int_0^1\int_0^{x^2}(x-y)dydx$$

$$= \int_0^1 \left(xy - \frac{1}{2}y^2 \right)\Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x(x^2) - \frac{1}{2}(x^2)^2 \right) - \left(x(0) - \frac{1}{2}(0)^2 \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{10}x^5 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4}(1)^4 - \frac{1}{10}(1)^5 = \frac{1}{4} - \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow m = \iint_S \delta(x,y)dA = \frac{6}{40}$$

5.4.2. Pusat Massa

Titik pusat massa yaitu suatu titik yang menyebabkan benda dalam keadaan setimbang, titik pusat massa ini dituliskan sebagai koordinat titik yaitu : $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ dari pusat massa, koordinat ini dapat ditentukan oleh rumus berikut

$$\bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_S x\delta(x,y)dA}{\iint_S \delta(x,y)dA} \qquad \bar{y} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_S y\delta(x,y)dA}{\iint_S \delta(x,y)dA}$$

Secara rinci jika suatu benda tak homogen (lamina) yang dibatasi oleh $y=\varphi_1(x)$ dan $y=\varphi_2(x)$ dalam interval $[a,b]$ dan tingkat kerapatan $\delta(x,y)$, maka koordinat titik pusat massa $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ dapat ditentukan oleh :

1. Jika $\varphi_1(x)>\varphi_2(x)\ \ \forall x\in[a,b]$, maka $y=\varphi_1(x)$ sebagai batas atas dan $y=\varphi_2(x)$ sebagai batas bawah, maka koordinat titik pusat massa $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ ditentukan oleh rumus :

$$\bar{x}=\frac{M_x}{m}=\frac{\int_a^b\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)}x\delta(x,y)dydx}{\int_a^b\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)}\delta(x,y)dydx}\qquad \bar{y}=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_a^b\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)}y\delta(x,y)dydx}{\int_a^b\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)}\delta(x,y)dydx}$$

2. Jika $\varphi_1(x)<\varphi_2(x)\ \ \forall x\in[a,b]$, maka $y=\varphi_1(x)$ sebagai batas bawah dan $y=\varphi_2(x)$ sebagai batas atas, maka koordinat titik pusat massa $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ ditentukan oleh rumus :

$$\bar{x}=\frac{M_x}{m}=\frac{\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}x\delta(x,y)dydx}{\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\delta(x,y)dydx}\qquad \bar{y}=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}y\delta(x,y)dydx}{\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\delta(x,y)dydx}$$

Contoh 5.12 :

Sebuah benda tak homogen (lamina) mempunyai kerapatan $\delta(x,y)=x-y$, lamina tersebut dibatasi oleh sumbu x, garis $x=0$ dan garis $x=1$ serta kurva $y=x$, koordinat titik pusat massa.

Penyelesaian 5.12 :

Dari soal di atas, berarti lamina tersebut di batasi oleh batas x dari $x=0$ sampai $x=1$, serta batas y dari $y=0$ sampai $y=x$ sehingga koordinat titik pusat massa adalah :

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_S x\delta(x,y)dA}{\iint_S \delta(x,y)dA} = \frac{\int_0^1\int_0^x x(x-y)dydx}{\int_0^1\int_0^x (x-y)dydx}$$

$$= \frac{\int_0^1\int_0^x (x^2-xy)dydx}{\int_0^1\int_0^x (x-y)dydx}$$

$$= \frac{\int_0^1 \left(x^2y - \frac{1}{2}xy^2\right)_0^x dx}{\int_0^1 \left(xy - \frac{1}{2}y^2\right)_0^x dx}$$

$$= \frac{\int_0^1 \left(x^2(x) - \frac{1}{2}x(x)^2\right)dx}{\int_0^1 \left(x(x) - \frac{1}{2}(x)^2\right)dx}$$

$$= \frac{\int_0^1 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^3\right)dx}{\int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx} = \frac{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3\right)dx}{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}x^4\Big|_0^1}{\frac{1}{6}x^3\Big|_0^1} = \frac{\frac{1}{8}(1)^4}{\frac{1}{6}(1)^3}$$

$$= \frac{6}{8}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_S y\delta(x,y)\,dA}{\iint_S \delta(x,y)\,dA} = \frac{\int_0^1\int_0^x y(x-y)\,dydx}{\int_0^1\int_0^x (x-y)\,dydx}$$

$$= \frac{\int_0^1\int_0^x \left(xy - y^2\right)dydx}{\int_0^1\int_0^x (x-y)\,dydx}$$

$$= \frac{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{3}y^3\right)_0^x dx}{\int_0^1 \left(xy - \frac{1}{2}y^2\right)_0^x dx}$$

$$= \frac{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x(x)^2 - \frac{1}{3}(x)^3\right)dx}{\int_0^1 \left(x(x) - \frac{1}{2}(x)^2\right)dx}$$

$$= \frac{\int_0^1 \left(\frac{1}{6}x^3\right)dx}{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{24}x^4\Big|_0^1}{\frac{1}{6}x^3\Big|_0^1} = \frac{\frac{1}{24}(1)^4}{\frac{1}{6}(1)^3}$$

$$= \frac{6}{24}$$

Sehingga diperoleh koordinat titik pusat massa benda tidak homogen tersebut adalah

$$\left(\bar{x}, \bar{y}\right) = \left(\frac{6}{8}, \frac{6}{24}\right)$$

5.4.3. Soal-Soal Latihan

Tentukan massa dan titik pusat massa dari lamina yang dibatasi oleh kurva dan kerapatan yang diberikan berikut ini

1. $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 3$ dengan tingkat kerapatan $\delta(x, y) = y + 1$
2. $x = 0$, $x = 1$, $y = x$, $y = x + 1$ dengan kerapatan $\delta(x, y) = 2y + x$
3. $x = 0$, $x = 1$, $y = x$, $y = -x$ dengan kerapatan $\delta(x, y) = xy + x$
4. $y = x^2$, $y = 4$ dengan tingkat kerapatan $\delta(x, y) = y$
5. Bujursangkar dengan titik sudut $(0,0)$,$(0,a)$,(a,a), dan $(a,0)$ dengan kerapatan $\delta(x, y) = y + x$
6. Segitiga dengan titik sudutnya $(0,0)$ $(0,a)$ $(a,0)$ dengan tingkat kerapatan $\delta(x, y) = y^2 + x^2$