KALKULUS VEKTOR

Pada bab ini kita akan membahas tentang kalkulus Vektor, yang terdiri dari :

1. Medan Vektor
2. Integral Garis
3. Kebebasan Tapak
4. Teorema Green di Bidang
5. Integral Permukaan
6. Teorema Divergensi Gauss
7. Teorema Stokes

1. Medan Vektor

Medan Vektor merupakan daerah yang mengandung besaran medan vector yang berubah sekaligus arah dan besarnya pada setiap titik ruang. Dan di tulis sebagai fungsi. Contoh medan vector adalah medan gaya, medan listrik, medan potensial vector magnetic.

Menurut teori deferensial parsial:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz = (\nabla T)\bullet(d\mathbf{l})$$

mengingat d**l** = **i** dx + **j** dy + **k** dz, maka gradien suhu T = ∇T = $\frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$

merupakan besaran vektor dengan 3 komponennya masing-masing mempunyai arah sesuai dengan arah vektor satuan **i, j,** dan **k.** Jadi interpretasi geometris suatu gradien, seperti vektor yang mempunyai harga dan arah, dan ditulis dalam bentuk abstrak:

dengan θ sudut antara ∇T dengan d**l**, sehingga operator ∇ didefinisikan dalam koordinat Cartesius sebagai:

$$\nabla \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Seperti halnya vektor biasa, operator ∇ dapat bekerja dengan 3 bentuk perkalian:

1. Bekerja pada fungsi skalar: ∇T disebut **gradien**
2. Bekerja pada fungsi vektor, melalui perkalian dot: ∇.**V** disebut **divergensi**

3. Bekerja pada fungsi vektor, melalui perkalian silang: ∇ x **V** disebut **rotasi** atau **curl.**

Gradien

Gradien suatu fungsi scalar φ adalah suatu vector yang harganya merupakan turunan berarah maksimum di titik yang sedang di tinjau, sedangkan arahnya merupakan arah turunan berarah maksimum di titik tersebut.

$$\nabla\varphi = i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + j\frac{\partial\varphi}{\partial y} + k\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Contoh

1. Gradien suatu fungsi r

Ambil f(r) = $f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$

$$\nabla f(r) = \mathbf{i}\frac{\partial f(r)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f(r)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f(r)}{\partial z}$$

dengan $\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dx} \bullet \frac{\partial r}{\partial x}$ dan $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{x}{r}$

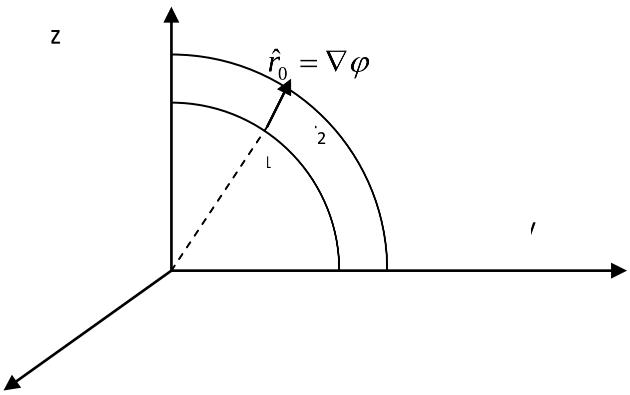
sehingga

$$\nabla f(r) = \left[\mathbf{i}\left(\frac{x}{r}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{y}{r}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{z}{r}\right)\right]\frac{df(r)}{dr} = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{df}{dr} = \hat{r}_0\frac{df}{dr}$$

misal $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \hat{r}_0\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = \left(-\frac{1}{r^2}\right)\hat{r}_0$

2. Anggap bahwa permukaan yang diperhatikan merupakan kulit bola sepusat/konsentris, maka $\varphi(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r_i = C_i =$ konstan dan $\Delta\varphi = \Delta r_i = \Delta C_i$ adalah beda nilai pada kulit bola yang berbeda. Gradien φ:

$$\nabla\varphi(r) = \hat{r}_0\frac{d\varphi(r)}{dr} = \hat{r}_0$$



Jelaslah bahwa turunan maksimum fungsi adalah dalam arah radial.

Divergensi

Divergensi suatu vector adalah limit integral permukaan persatuan volum, jika volum yang terlingkupi oleh permukaan tersebut mendekati nol.

$$\nabla \bullet \mathbf{F} = \lim_{\mathbf{V} \to \mathbf{0}} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\mathbf{a}$$

Dalam koordinat tegak lurus, divergensi:

$$\nabla \cdot .\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Arti fisis dari divergensi dapat dipahami seperti contoh pada mekanika fluida berikut:
Jika v menyatakan kecepatan fluida sebagai fungsi kedudukan, dan ρ kerapatannya, maka $\oint_S \rho\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, da$, jelas merupakan jumlah volum fluida persatuan waktu (atau debit) yang meninggalkan volum yang terlingkupi oleh S. Jadi jelaslah bahwa divergensi dapat ditafsirkan sebagai limit kuat sumber persatuan volum atau merupakan kerapatn sumber fluida tak termampatkan.

Teorema Divergensi/Teorema Gauss

Integral dari divergensi suatu vector pada volum V sama dengan integral permukaan komponen normal vector itu pada permukaan yang melingkupi V.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da$$

Kita tinjau vector-vektor radial yang banyak muncul dalam masalah listrik magnet:

$$\nabla\cdot.\mathbf{r}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z)=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

Bagaimana divergensi perkalian vector dan fungsi scalar radial?

$$.\nabla\cdot\mathbf{r}\,f(r)=\frac{\partial}{\partial x}[x\,f(r)]+\frac{\partial}{\partial y}[y\,f(r)]+\frac{\partial}{\partial z}[z\,f(r)]=3f(r)+\left(\frac{x^2}{r}\frac{df}{dr}+\frac{y^2}{r}\frac{df}{dr}+\frac{z^2}{r}\frac{df}{dr}\right)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{r}\,f\boxed{(r)=3f(r)+r\frac{df}{dr}}$$

Bila $f(r)=r^{n-1}$, maka $\nabla\cdot\mathbf{r}\,r^{n-1}=3r^{n-1}+(n-1)r^{n-1}=(n+2)r^{n-1}$

Rotasi atau Curl

Rotasi suatu vector adalah limit angka banding antara integral perkalian silang vector itu dengan normal yang berarah ke luar di seluruh permukaan tertutup terhadap volum yang terlingkup oleh permukaan tersebut untuk untuk harga volum yang mendekati nol.

$$\nabla\times\mathbf{F}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \mathbf{n}\times\mathbf{F}\,da$$

Perhatikan bahwa definisi rotasi sangat mirip dengan divergensi, bedanya dot dengan cross. Kita tinjau vector dan fungsi radial

$$\nabla\times\mathbf{r}\,f(r)=f(r)\nabla\times\mathbf{r}+[\nabla f(r)]\times\mathbf{r}$$

$$\nabla\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0,$$

dan $\nabla f(r)=\hat{r}_0\frac{df(r)}{dr}$, sehingga

$$\nabla\times\mathbf{r}f(r)=\frac{df}{dr}\hat{r}_0\times\mathbf{r}=0$$ karena $\hat{r}_0$ dan $\mathbf{r}$ arahnya sama.

Arti fisis rotasi suatu medan vector adalah setara dengan divergensi suatu medan vector. Namun bahwasanya medan vector ada yang bersifat divergen atau bersifat rotasional. Divergensi medan vector adalah rapat sumber dari medan vector yang bersifat divergen, sedang Rotasi medan vector menghasilkan rapat sumber dari suatu medan vector rotasional.

Operator Laplace

. $$\nabla\cdot\nabla\varphi=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\nabla^2\varphi$$

$\Rightarrow\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, dinamakan operator Laplace

Cari $\nabla\bullet\nabla g(r)=?$

Dari contoh 1: $\nabla g(r)=\hat{r}_0\frac{dg(r)}{dr}$

Dari contoh 4: $\nabla\cdot\nabla g(r)=\nabla\cdot\hat{r}_0\frac{dg(r)}{dr}=\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{dg}{dr}$

$$\boxed{W=\sum_{k=1}^{m}\int_a^b F_k[\vec{s}(t)]s_k'(t)dt}$$

$$\therefore\quad\nabla\cdot\nabla g(r)=\frac{3}{r}\frac{dg}{dr}+\frac{r}{r}\frac{d^2g}{dr^2}+\left[-\frac{r}{r^2}\frac{dg}{dr}\right]=\frac{2}{r}\frac{dg}{dr}+\frac{d^2g}{dr^2}$$

2. Integral Garis

Definisi : Misal $\vec{s}$ suatu lintasan dalam ruang dimensi m pada interval [a,b]. Andaikan $\vec{F}$ adalah medan vektor yang didefinisikan pada lintasan $\vec{s}$. Integral $\vec{F}$ sepanjang $\vec{s}$ disebut integral garis.

$$W=\int_a^b\vec{F}.d\vec{s}=\int_a^b F[\vec{s}(t)]s'(t)dt$$

Dalam hal ini

$\vec{F}=(F_1,F_2,\ldots,F_m)$ sedangkan, $\vec{s}=(s_1,s_2,\ldots,s_m)$. Jadi dapat juga ditulis

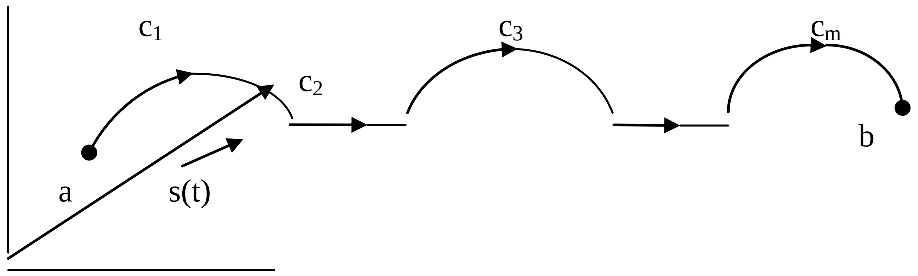
Dalam ruang dua dimensi (2D) pernyataannya menjadi → $x = s_1(t),\ y = s_2(t)$

Dalam ruang dua dimensi (3D) pernyataannya menjadi → $x = s_1(t),\ y = s_2(t),\ z = s_3(t)$

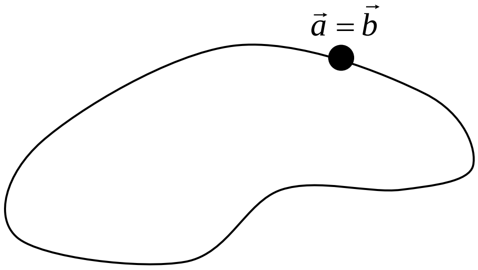
Sifat Integral Garis

1. $\int\left(a\vec{F} + b\vec{G}\right)d\vec{s} = a\int \vec{F}.d\vec{s} + b\int \vec{G}.d\vec{s}$
2. Jika lintasannya adalah $c = c_1 + c_2 + \cdots + c_m$

   maka $\int_c \vec{F}.d\vec{s} = \int_{c_1} \vec{F}.d\vec{s} + \int_{c_2} \vec{F}.d\vec{s} + \cdots + \int_{c_m} \vec{F}.d\vec{s}$



3. Bila $\vec{a} = \vec{b}$ lintasan disebut lintasan tertutup, simbol $\oint$ biasa digunakan



Contoh 1

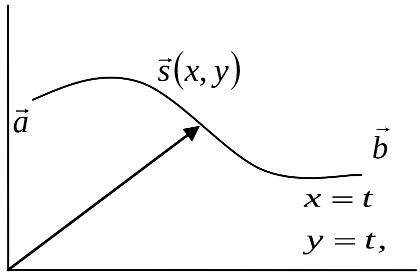
Misalkan $\vec{F}(x,y) = \sqrt{y}\vec{i} + \left(x^3 + y\right)\vec{j}$, $\forall(x,y)$ dengan $y \geq 0$

Hitunglah kerja yang dilakukan oleh $\vec{F}$ untuk memindahkan suatu partikel dari titik (0,0) ke titik (1,1) sepanjang lintasan berikut:

a. Garis dengan persamaan $x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1$

b. Garis dengan persamaan $x = t^2, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$

Jawab :



a. Jadi $\vec{s} = x\vec{i} + y\vec{j} \rightarrow \vec{s}(t) = t\vec{i} + t\vec{j}$

$$\vec{F}(x,y) = \sqrt{y}\vec{i} + \left(x^3 + y\right)\vec{j} \rightarrow \vec{F}(t) = \sqrt{t}\vec{i} + \left(t^3 + t\right)\vec{j}$$

$$\therefore W = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(t) \cdot d\vec{s}(t)$$

$$\therefore W = \int_0^1 \left(\sqrt{t}\vec{i} + \left(t^3 + t\right)\vec{j}\right) \cdot \left(\vec{i} + \vec{j}\right) dt = \int_0^1 \left(t^{1/2} + t^3 + t\right) dt = \frac{17}{12}$$

Jadi $\vec{s} = x\vec{i} + y\vec{j} \rightarrow \vec{s}(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$

$$\therefore d\vec{s}(t) = \left(2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}\right)dt$$

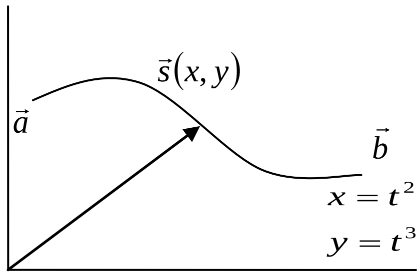
$$\vec{F}(x,y) = \sqrt{y}\vec{i} + \left(x^3 + y\right)\vec{j}$$

$$\rightarrow \vec{F}(t) = t^{3/2}\vec{i} + \left(t^6 + t^3\right)\vec{j}$$

$$\therefore W = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_0^1 \left[t^{3/2}\vec{i} + \left(t^6 + t^3\right)\vec{j}\right] \cdot \left[2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}\right]dt$$

$$= \int_0^1 \left[2t^{5/2} + 3\left(t^8 + t^5\right)\right]dt = \frac{59}{42}$$



<u>Catatan:</u> jika suatu medan vektor $\vec{F}$ adalah gradien dari medan skalar φ, maka φ disebut potensial untuk $\vec{F}$ *level set* dari φ disebut <u>permukaan ekipotensial.</u>

Dalam 2D disebut garis-garis ekipotensial (equipotential line) jika,

a. φ menyatakan temperature → isothermal

b. φ menyatakan tekanan → isobaric

c. φ menyatakan density → isodensity

Contoh:_ $\varphi(x,y,z) = r^m$ dengan $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $\forall$ integer m medan vektor

$$F(x,y,z) = \nabla\varphi = \nabla(r^m) = mr^{m-1}\nabla(r) = mr^{m-1}\left[\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right]$$

$$= mr^{m-1}\left[\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right] = mr^{m-2}\vec{r}$$

Jadi , $\therefore \vec{F}(x,y,z) = mr^{m-2}\vec{r}$

Sebagai latihan coba anda selesaikan soal ini. Massa m bergerak dalam orbit lingkaran dengan kecepatan sudut ω. Mengalami gaya sentrifugal $\vec{F}(x,y,z) = m\omega^2\vec{r}$. Tunjukan bahwa potensial φ, akibat gaya $\vec{F}$ adalah $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)$, $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

3. KEBEBASAN TAPAK

Andaikan C kurva mulus sepotong-sepotong pada bidang xy, , yang dimulai di $(x(a), y(a))$ dan berakhir di $(x(b), y(b))$, $a \le t \le b$. Maka integral garis $\int_C f(x, y)ds$ 14 disebut **bebas tapak** apabila integral tersebut hanya dipengaruhi oleh titik awal dan titik akhir (tidak dipengaruhi oleh bentuk kurva C). Artinya untuk setiap kurva yang mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama, maka integral garisnya sama.

Teorema A (Teorema Bebas Tapak)

Andaikan **F**(**r**) kontinu pada suatu himpunan tersambung terbuka D. Maka integral $\int_C$ **F** . d**r** garis bebas tapak jika dan hanya jika **F**(**r**) = f (**r**) untuk suatu fungsi skalar f (**F** adalah medan vektor konservatif).

Contoh 13

Buktikan integral $\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy$ bebas tapak, kemudian hitung integral tersebut.

Jawab

Diketahui **F** = $(y^2 + 2xy)$**i** + $(x^2 + 2xy)$**j**. Maka

$f_x = y^2 + 2xy$ [redacted] $(x, y) = y^2x + x^2y + g(y)$

$f_y = x^2 + 2xy$ = $2yx + x^2 + g'(y)$ [redacted] $g'(y) =$ [redacted] $g(y) = c$

Jadi, terbukti **F** bebas tapak karena ada fungsi potensial $f(x, y) = xy^2 + x^2y + c$.

Maka,

$$\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy = f(3,1) - f(-1,2) \quad = 12 - (-2) =$$

Akibat Teorema

Pernyataan di bawah ini ekuivalen:

1. **F**(**r**) = f (**r**) untuk suatu fungsi f

2. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ bebas tapak

3. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ untuk setiap tapak tertutup.

Contoh 14

Hitung $\int_C (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy$, C adalah lingkaran dengan pusat di (0, 0) dan berjari-jari 2, orientasi positif.

Jawab

Dari contoh 13 **F** medan vektor konservatif dan *C* kurva tertutup, maka berdasarkan teorema

$$\int_C (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy = \quad 0$$

Teorema B (Teorema Rotasi)

Andaikan **F** = *M***i** + *N***j** + *P***k** dengan *M*, *N*, dan *P* kontinu bersama-sama dengan turunan parsial tingkat pertamanya ada pada himpunan tersambung *D* dengan tanpa lubang. Maka **F** konservatif jika dan hanya jika rot **F** = 0, yakni

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \ \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Contoh 15

Buktikan $\mathbf{F} = (6xy^3 + 2z^2)\mathbf{i} + 9x^2y^2\mathbf{j} + (4xz + 1)\mathbf{k}$ medan vektor konservatif

Jawab

$M = 6xy^3 + 2z^2, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 18xy^2 \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = 4z$

$N = \quad , \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 18xy^2, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = 0$

$P = 4xz + 1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \frac{\partial P}{\partial x} = 4z$

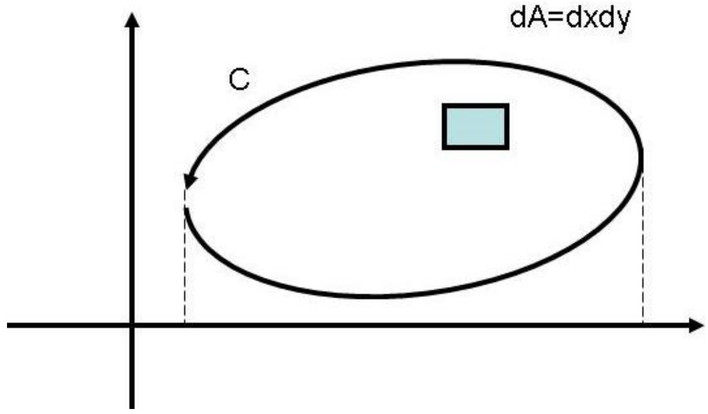
Maka diperoleh rot $\mathbf{F} = 0$.

Berdasarkan teorema rotasi, $\mathbf{F}$ adalah medan vektor konservatif

4. TEOREMA GREEN DALAM BIDANG

Misalkan P dan Q dua fungsi dengan dua variable, kontinu dan memiliki turunan parsial pertama yang kontinu pada suatu daerah R di bidang xy dan daerah ini di batasi oleh kurva C. Maka

$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA$



Simbol $\oint_C$ berarti bahwa integral lengkungan diambil satu kali putar pada C dalam arah berlawanan jarum jam.

Teorema:

Jika R suatu daerah macam I atau II (kombinasi), maka luas daerah R tersebut adalah

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Dengan C batas daerah R

Bukti:

Misal $P(x,y) = -\frac{y}{2}\ dan\ Q(x,y) = \frac{x}{2}$

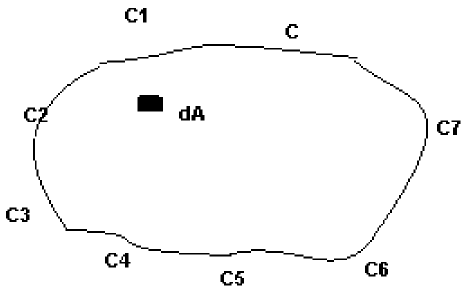
Dari Teorema Green

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA = \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dA = \iint_R dA$$

Jadi

$\oint_C \frac{x}{2}dy - \frac{y}{2}dx = \iint_R\ dA$

$$\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx =$$



Catatan:

Jika lengkungan C dapat diuraikan menjadi $C_1, C_2, C_3 \ldots maka\ \oint = \oint_1 + \oint_2 + \oint_3 + \ldots \oint_n$

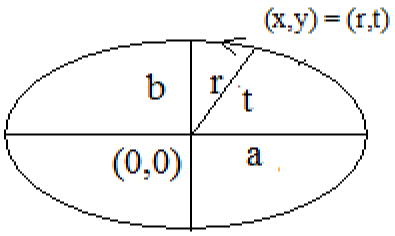
Contoh

(1) Dit : Tentukan luas daerah yang terkurung oleh ellips

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Jaw : Perhatikan $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

atau $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$



Misal $\frac{x}{a}$ = cos t $\rightarrow \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$

Kita gunakan A = $\frac{1}{2}\oint_c x\, dy - y\, dx$ .... (i)

jadi, karena x = a cos t

$$\left.\begin{aligned} dx &= -\, a \sin t\, dt \\ y &= b \sin t \\ dy &= b \cos t\, dt \end{aligned}\right\} \quad \text{................. (ii)}$$

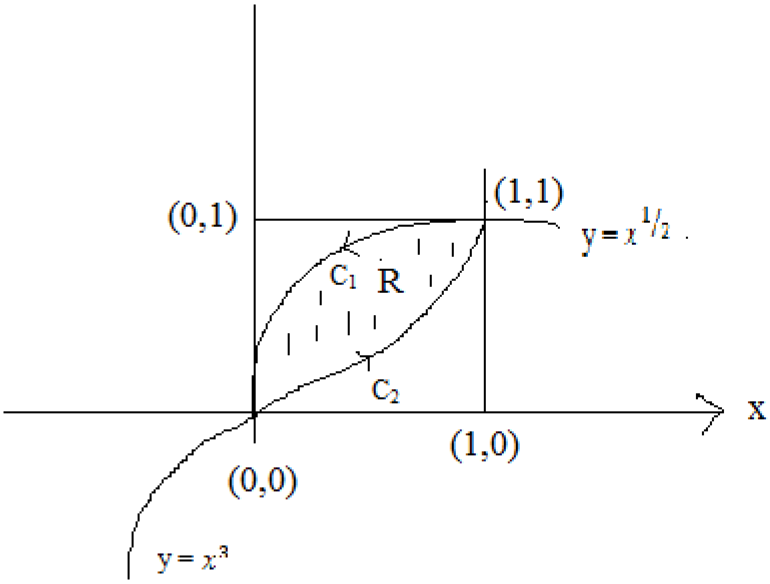
(ii) pada (i)

A = $\frac{1}{2} \int_c [a \cos t\ b \cos t + a\ b \sin t \sin t]$ dt

A = $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a\ b\ \{cos^2 t + sin^2 t\}\ dt = \frac{1}{2}$ a b $\int_0^{2\pi} dt = \pi$ a b sat luas.

(2) Dit : Luas daerah R yang dibatasi lengkungan y = x^3 dan y = $x^{1/2}$

Jawab:



Misal potongan kurva

C_1 : y = $x^{1/2}$ dari (1,1) → (0,0)

C_2 : y = x^3 dari (0,0) → (1,1)

C = C_1 + C_2

Luas R : $A = \frac{1}{2}\oint_c x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\oint_{c_1} x\,dy - y\,dx + \frac{1}{2}\oint_{c_2} x\,dy - y\,dx$

sepanjang

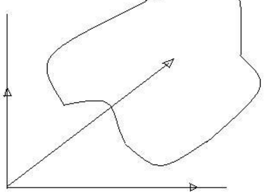
C_1 : y = $x^{1/2} \rightarrow dy = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx$, jadi dapat ditulis untuk lengkungan ini

$x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}x^{1/2}\,dx - x^{1/2}\,dx = -\frac{1}{2}x^{1/2}\,dx$

C_2 : y = $x^3 \rightarrow dy = 3x^2\,dx$ jadi $x\,dy - y\,dx = 3x^3\,dx - x^3\,dx = 2x^3\,dx$

Jadi $A = \frac{1}{2}\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x^{1/2}\,dx\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 2x^3\,dx = \frac{5}{12}$ satuan luas

Theorema Green dalam bentuk vektor

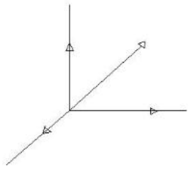


1. Jika $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$

$$\iint_R\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy = \oint_c (F_1dx + F_2dy) \quad \text{(Skalar)}$$

2. $$\iint_R\left(Curl\,\vec{F}\right)dxdy = \oint_c \vec{F}\,d\vec{r} \quad \text{(vektor)}$$

Dalam hal ini $Curl\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$, dalam 3D



$\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$

<u>Catatan</u> :

$Div\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$ $\quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ $\quad \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

Atau $\nabla \bullet V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \bullet \left(V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}\right)$

$$Gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$Div(Gradf) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f$$

$$Curl(Gradf) = \vec{O}$$

Ingat : $Div\vec{V}$ menghasilkan skalar $Grad\,\vec{V}$ **menghasilkan vektor**

5. Integral Permukaan

Andaikan permukaan G berupa grafik $z = f(x, y)$ dengan (x, y) mempunyai jangkauan atas persegi panjang R pada bidang xy. Andaikan P suatu partisi yang membagi R menjadi n-buah persegipanjang bagian R_i; menghasilkan padanan partisi permukaan G menjadi n-potongan G_i. Pilih titik $(\overline{x_i}, \overline{y_i})$ di R_i dan tetapkan $(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}) = (\overline{x_i}, \overline{y_i}, f(\overline{x_i}, \overline{y_i}))$ adalah titik yang berpadanan di G_i , maka definisi **integral permukaan** adalah

$$\iint_G g(x, y, z)\, dS = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}) \Delta S_i$$

Definisi di atas tidak praktis untuk perhitungan integral permukaan, sehingga diperlukan cara yang praktis untuk menghitung integral permukaan.

Teorema Integral Permukaan

Andaikan G suatu permukaan berupa grafik $z = f(x, y)$ dengan (x, y) di R. Jika f mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu dan $g(x, y, z) = g\big(x, y, f(x, y)\big)$ kontinu pada R , maka

$$\iint_G g(x, y, z)\, dS = \iint_R g\big(x, y, f(x, y)\big) \sec\varphi \, dA$$

$$= \iint_R g(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dy dx$$

dengan φ adalah sudut antara normal satuan ke atas **n** di $(x, y, f(x, y))$ dan sumbu z positif.

Contoh 1

Hitung $\iint_G xyz\,dS$ dengan G adalah bagian dari kerucut $z^2 = x^2 + y^2$ di antara bidang $z = 1$ dan $z = 4$.

Jawab

$$z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = f(x, y)$$

didapat

$$f_x^2 + f_y^2 + 1 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1 = 2$$

Jadi,

$$\iint_G xyz\,dS = \iint_R xy\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{2}\, dy dx$$

$$= \sqrt{2}\int_{0}^{2\pi}\int_{1}^{4}(r\cos\theta)(r\sin\theta)r^2\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_{0}^{2\pi}\left[\sin\theta\cos\theta\frac{r^5}{5}\right]_{1}^{4}d\theta$$

$$= \frac{1023\sqrt{2}}{5}\left[\frac{sin^2\theta}{2}\right]_{0}^{2\pi} = 0$$

1.2 Fluks Medan Vektor Menembus Permukaan

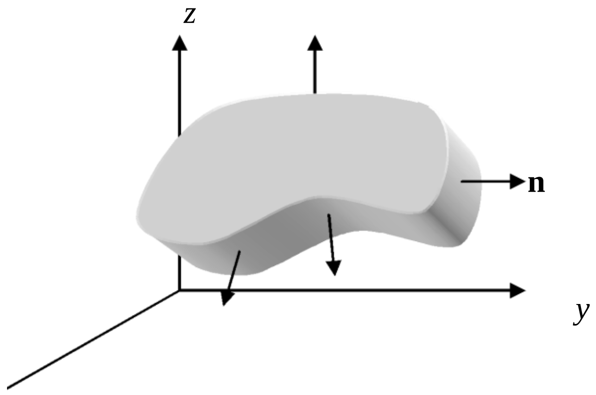
Permukaan yang dimaksud adalah permukaan dengan dua sisi, yaitu seperti **pita mÖbius** Misalkan permukaan ini mulus, maka ia memiliki suatu vektor normal satuan **n** yang berubah-ubah. Andaikan *G* suatu permukaan dua sisi yang demikian mulus dan anggap bahwa ia terendam di dalam fluida dengan suatu medan vektor **F** hampir konstan, dan volume fluida ■ *V* yang melewati potongan ini dalam arah normal satuan **n** adalah

■ *V* ■ **F . n** ■ *S*

Fluks **F** melintasi *G* = $\iint_G$ **F . n** dS

6. Teorema Gauss

Andaikan S suatu benda pejal tertutup dan terbatas dalam ruang dimensi-3, yang secara lengkap dicakup oleh suatu permukaan mulus sepotong-sepotong S (gambar 12)



Gambar 12

Teorema Gauss

Andaikan **F** = M**i** + N**j** + P**k** suatu medan vektor demikian sehingga M, N, dan P mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu pada S dan batasnya S. Jika **n** menyatakan normal satuan terluar terhadap S , maka

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_S \text{div}\,\mathbf{F}\, dV \text{atau}$$

$$\iint_{\partial S}(M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma)dS = \iiint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dV$$

Bukti

Pertama tinjau kasus dimana S adalah x sederhana, y sederhana, dan z sederhana. Cukup menunjukan bahwa

$$\iint_{\partial S} M\cos\alpha\, dS = \iiint_S \frac{\partial M}{\partial x} dV$$

$$\iint_{\partial S} N\cos\beta\, dS = \iiint_S \frac{\partial N}{\partial y} dV$$

$$\iint_{\partial S} P\cos\gamma\, dS = \iiint_S \frac{\partial P}{\partial z} dV$$

Cukup membuktikan yang ketiga, karena yang lain serupa.

Karena S adalah z sederhana, maka S dapat dijelaskan oleh $f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)$. Seperti pada gambar 13, S terdiri dari tiga bagian; S_1 yang berpadanan dengan $z = f_1(x,y)$; S_2 yang berpadanan dengan $z = f_2(x,y)$; dan permukaan S_3 samping yang boleh kosong; pada S_3 cos = cos 90^0 = 0, sehingga dapat diabaikan.

$$\iint_{\partial S_2} P\cos\gamma\, dS = \iint_{R} P\big(x, y, f_2(x,y)\big)dxdy$$

$$\iint_{\partial S_1} P\cos\gamma\, dS = \int P\big(x, y, f_1(x,y)\big)dxdy$$

Jadi,

$$\iint_{\partial S} P\cos\gamma\, dS = \iint_{R} \left[P\big(x, y, f_2(x,y)\big) - P\big(x, y, f_1(x,y)\big)\right]dxdy$$

$$= \iint_{R} \left[\int_{f_1}^{f_2} \frac{\partial P}{\partial z} dz\right] dxdy$$

$$= \iiint_{S} \frac{\partial P}{\partial z}$$

Contoh 1

Hitung fluks medan vektor **F** = x^2**i** + $2xz$**j** +yz^3**k** melewati permukaan benda pejal persegipanjang S yang ditentukan oleh ; $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$.

Jawab

$M = x^2$, maka $= 2x$,

$N = 2xz$, maka $= 0$

$P = yz^3$, maka $\frac{\partial P}{\partial z} = 3xz^2$

Menurut teorema gauss, didapat

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{n}\, dS = \iiint_{S} (2x + 0 + 3xz^2)\, dV$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2x + 3xz^2)\, dzdydx = \quad 60$$

Perluasan dan Penerapan

Benda pejal S dapat diperluas untuk benda pejal berlubang seperti keju swiss, asal saja mensyaratkan **n** menunjuk menjauhi bagian dalam benda pejal tersebut. Andaikan S adalah kulit benda pejal antara dua bola sepusat yang berpusat di titik asal. Teorema Gauss berlaku asal saja S terdiri atas dua permukaan (permukaan luar dengan **n** menunjuk menjauhi titik asal dan permukaan dalam dengan **n** menunjuk ke arah titik asal)

Contoh 2

Andaikan S benda pejal yang ditentukan oleh $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ dan

$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + (2y + z)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$. Hitung $\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$

Jawab

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{S} (1 + 2 + 1)\, dV$$

$$= 4\left[\frac{4}{3}\pi(2^3) - \frac{4}{3}\pi(1^3)\right] = \frac{112}{3}\pi$$

7. Teorema Stokes

+

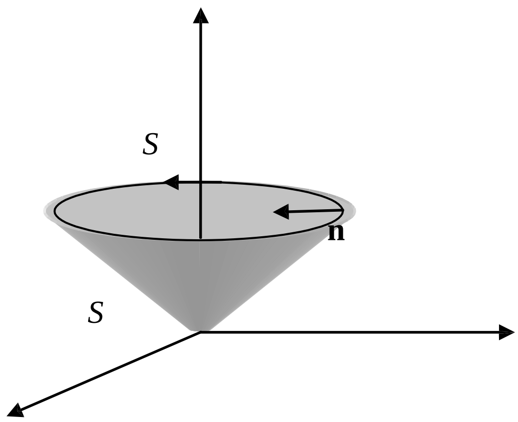
Andaikan *S*,   *S*, dan **n** seperti yang ditunjukkan di atas dan andaikan **F** = *M***i** + *N***j** + *P***k** adalah suatu medan vektor dengan *M*, *N*, dan *P* mempunyai turunan parsial tingkat pertama kontinu pada *S* dan batasnya   *S*, maka

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \,.\, \mathbf{T}\, dS = \iint_S \qquad (\text{curl } \mathbf{F}) \,.\, \mathbf{n}\, dS$$

Bukti : pada kuliah kalkulus lanjut

Contoh 1

Periksa kebenaran teorema stokes untuk **F** = *y***i** – *x***j** + *yz***k** jika *S* adalah paraboloid $z = x^2$ y^2 dengan lingkaran $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ sebagai batasnya



Jawab

Persamaan parameter untuk   *S* adalah *x* = cos *t* ; *y* = sin *t* ; *z* = 1, maka dz = 0 dan

cara langsung

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \,.\, \mathbf{T}\, dS = \oint_{\partial S} y dx - x dy = \int_0^{2\pi} [\sin t(-\sin t) dt - \cos t \cos t dt]$$

$$= -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi$$

Menggunakan teorema stokes

$$\text{Curl } \mathbf{F} = \blacksquare\ \blacksquare \quad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & yz \end{vmatrix} = z\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Jadi,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \,.\, \mathbf{T}\, dS = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \,.\, \mathbf{n}\, dS = \qquad [-z(2x) - 0 - 2] dxdy$$

$$= -\int_{-1}^{1} 2 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} [(x^2 + y^2)x - 1]\, dxdy$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r^3 \cos\theta + 1] r dr d\theta = -2\pi$$

KESIMPULAN

Kalkulus vektor (*vector calculus*) atau sering disebut analisis vektor dalam matematika adalah salah satu cabang ilmu yang mempelajari analisis riil dari vektor dalam dua atau lebih dimensi. Cabang ilmu ini sangat berguna bagi para insinyur dan fisikawan dalam menyelasikan masalah karena mengandung teknik-teknik dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan vektor.

Salah satu fokus dari kalkulus vektor adalah permasalahan bidang skalar, dimana terdapat suatu nilai dalam setiap titik dalam ruang. Contoh dari bidang skalar adalah temperatur udara di dalam suatu kamar. Kalkulus vektor juga fokus pada bidang vektor, dimana terdapat suatu vektor dalam setiap titik dalam ruang. Contoh dari bidang vektor adalah aliran air di laut di mana dalam setiap titik arah aliran bisa berbeda-beda.

Kalkulus vektor melingkupi operasi vektor, diferensial vektor, integral vektor, dan teorema-teorema yang berhubungan dengan operasi nabla.Nabla (atau del) adalah salah satu operator yang digunakan dalam kalkulus vektor. Terdapat empat operasi penting dalam kalkulus vektor berhubungan dengan operator ini, yaitu: Gradien, Divergensi, Curl, Laplacian.