KONIK DAN KOORDINAT KUTUB

I.1 DEFINISI DAN BAGIAN KONIK

- **Konik** adalah irisan kerucut
- **Konik** adalah perpotongan atau irisan antara bidang lengkung kerucut lingkaran tegak dengan bidang datar.
- **Konik** terbagi empat, yaitu :
  - **Berbentuk *lingkaran***
  - **Berbentuk *parabola***
  - **Berbentuk *elips***
  - **Berbentuk *hiperbola***

Definisi Konik

(yang berbentuk parabola, elips, dan hiperbola)

Konik adalah tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jaraknya ke titik tertentu dengan jaraknya ke garis tertentu mempunyai nilai tetap.

keterangan:

- **Titik tertentu = titik api *(fokus)***
- **Garis tertentu = garis arah *(direktriks)***
- **Nilai perbandingan tetap = *eksentrisitas (e)***

I.2 PARABOLA

- **Definisi**

Parabola adalah **tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya ke suatu titik tertentu sama dengan jaraknya ke garis tertentu.**

Bentuk Umum Persamaan Parabola yang Berpuncak di Titik Pusat (0,0)

1. $y^2 = 4px$ parabola terbuka ke kanan
2. $y^2 = -4px$ parabola terbuka ke kiri
3. $x^2 = 4py$ parabola terbuka ke atas
4. $x^2 = -4py$ parabola terbuka ke bawah

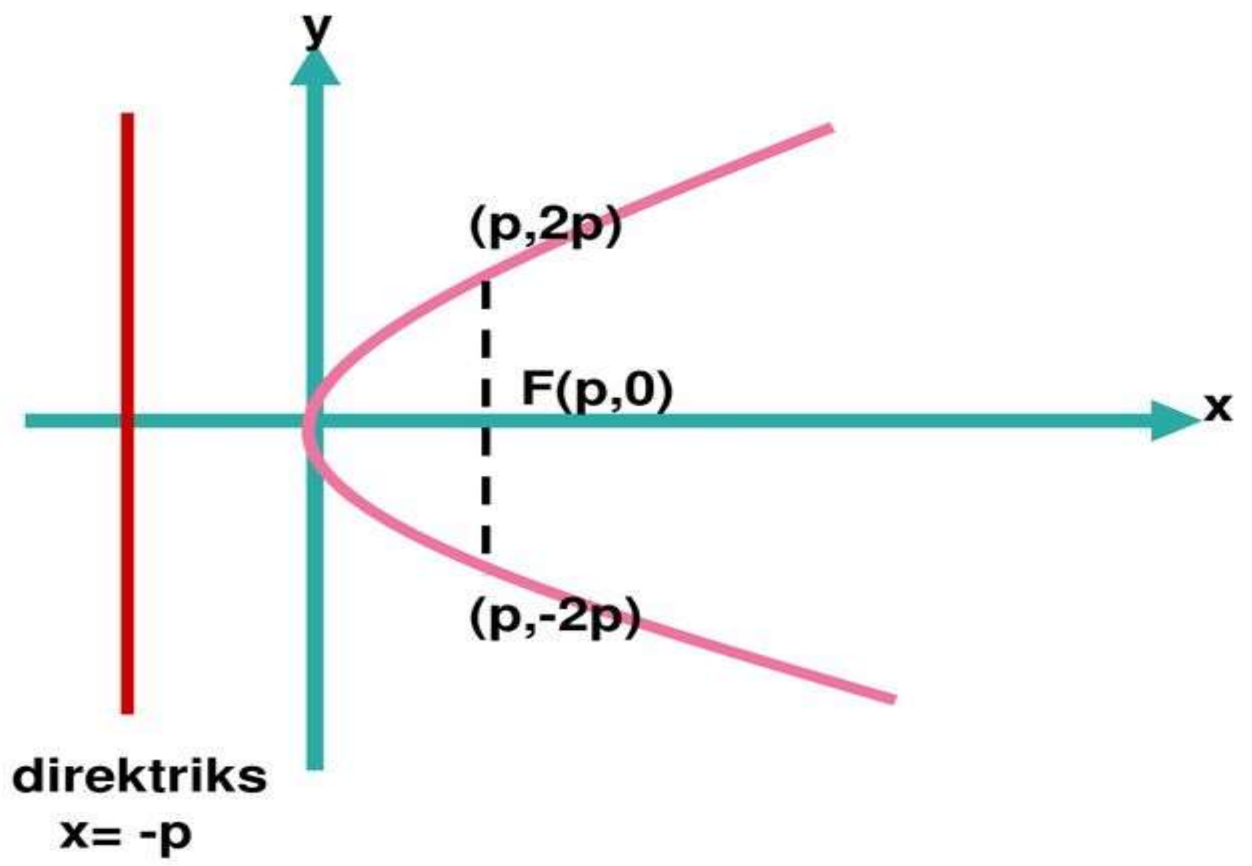
Keterangan :

$p > 0$

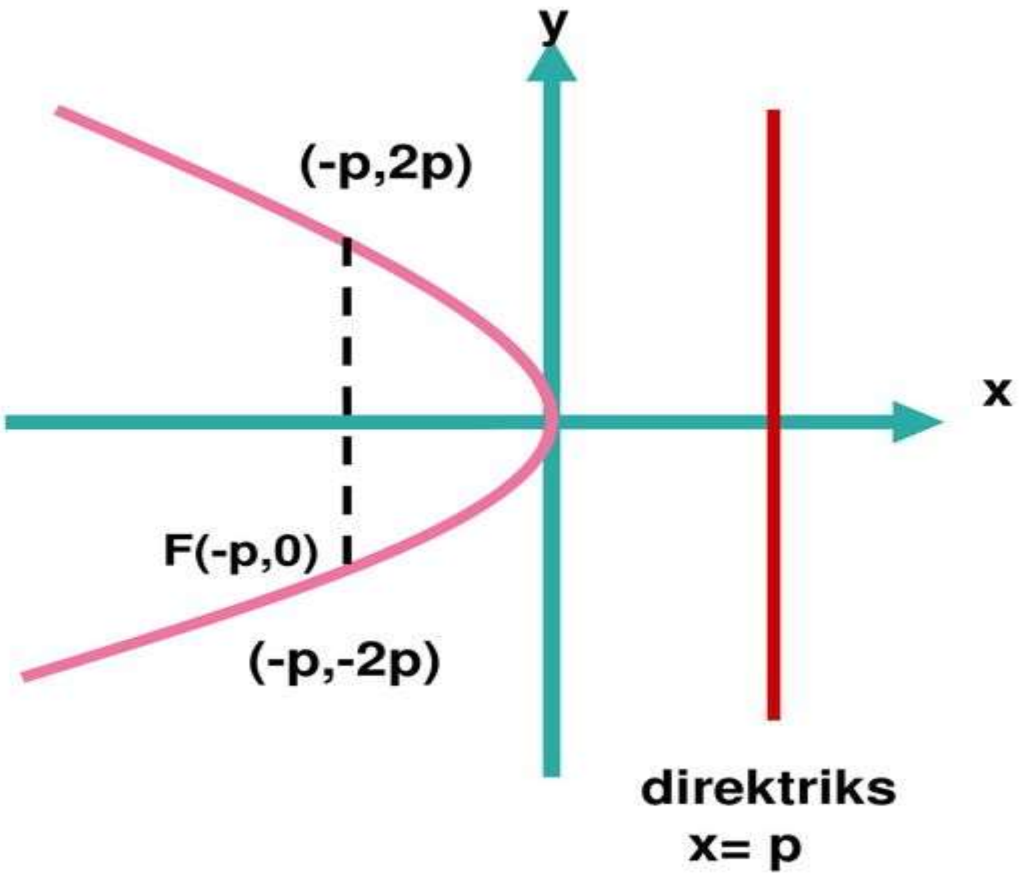
p = jarak fokus ke titik puncak parabola

RUMUS	$y^2=4px$	$y^2=-4px$	$x^2=4py$	$x^2=-4py$
Koordinat fokus	(p,0)	(-p,0)	(0,p)	(0,-p)
Garis arah	x = -p	x = p	y = -p	y = p
Sumbu simetri	y = 0	y = 0	x = 0	x = 0
Titik Latus Rectum	(p,2p) (p,-2p)	(-p,2p) (-p,-2p)	(2p,p) (-2p,p)	(2p,-p) (-2p,-p)
Panjang Latus Rectum	4p	4p	4p	4p

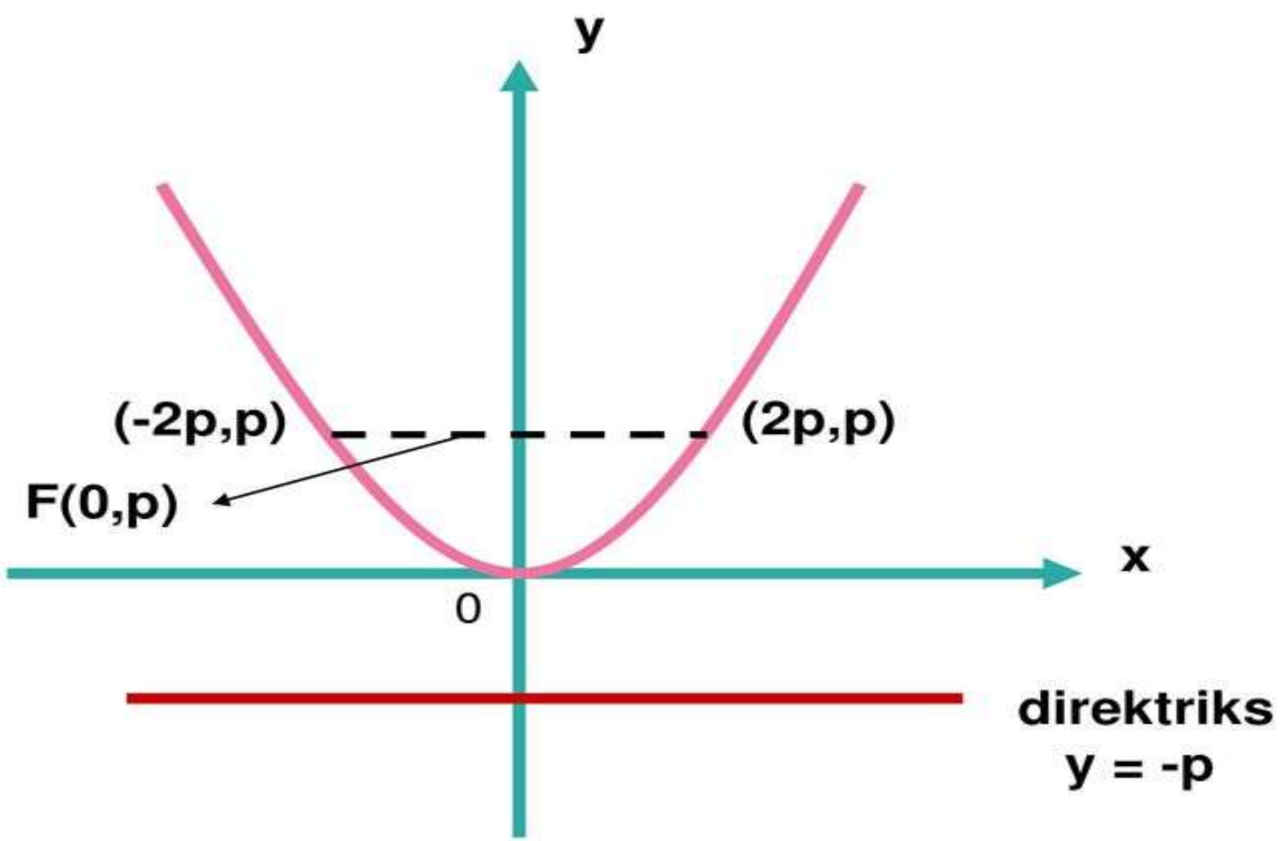
PARABOLA $y^2 = 4px$



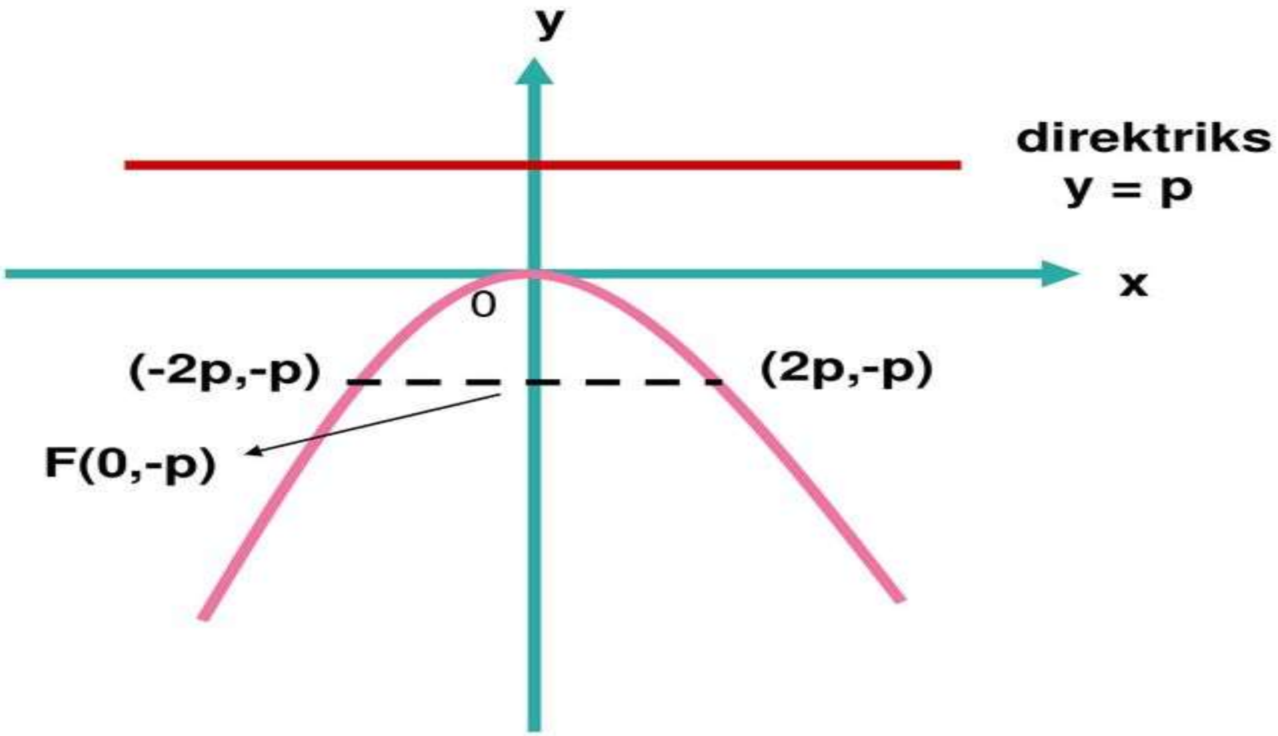
PARABOLA $y^2 = -4px$



PARABOLA $x^2 = 4py$



PARABOLA $x^2 = -4py$



Persamaan Garis Singgung dan Normal Parabola di Suatu Titik

Kedudukan garis dan parabola ditentukan oleh nilai *diskriminan D*

- D > 0 garis memotong parabola di 2 titik berbeda
- D = 0 garis menyinggung parabola
- D < 0 garis tidak memotong dan menyinggung

Persamaan Garis Singgung dan Normal Parabola di Titik (x_1,y_1)

Parabola	Persamaan Garis Singgung	Persamaan Garis Normal
$y^2 = 4px$ $y^2 = -4px$ $x^2 = 4py$ $x^2 = -4py$	$yy_1 = 2p(x+x_1)$ $yy_1 = -2p(x+x_1)$ $xx_1 = 2p(y+y_1)$ $xx_1 = -2p(y+y_1)$	Ditentukan dari persamaan garis singgung $y - y_1 = m(x-x_1)$ (m = kebalikan negatif m pada persamaan garis singgung)

I.3 ELIPS

- <u>**Definisi**</u>

  Elips adalah **tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu mempunyai nilai yang tetap.**

Bentuk Umum Persamaan Elips yang Berpusat di Titik (0,0)

1. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ **(elips horisontal)**

   atau

   $$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

2. $$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$ **(elips vertikal)**

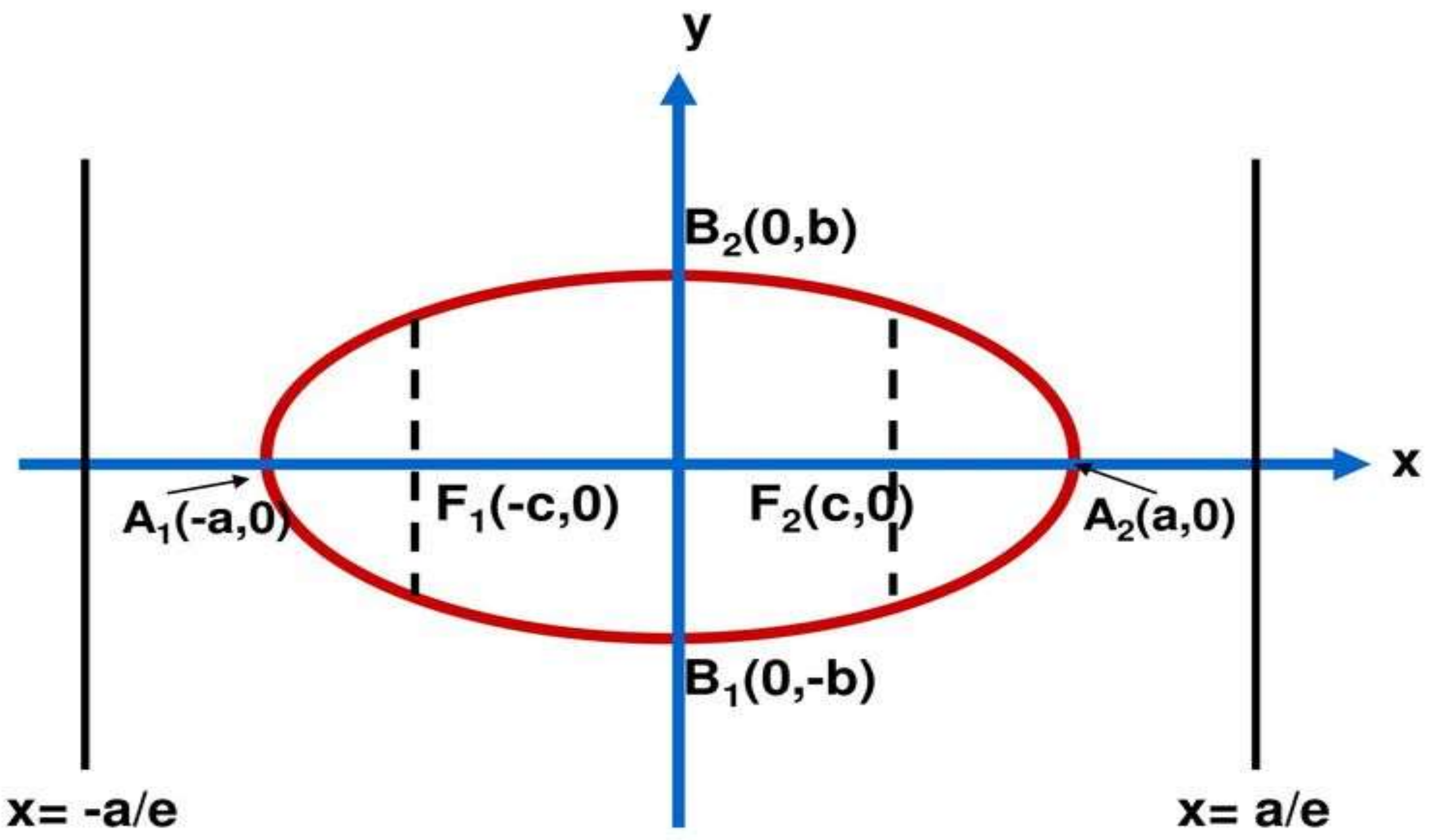
   $$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

   berlaku

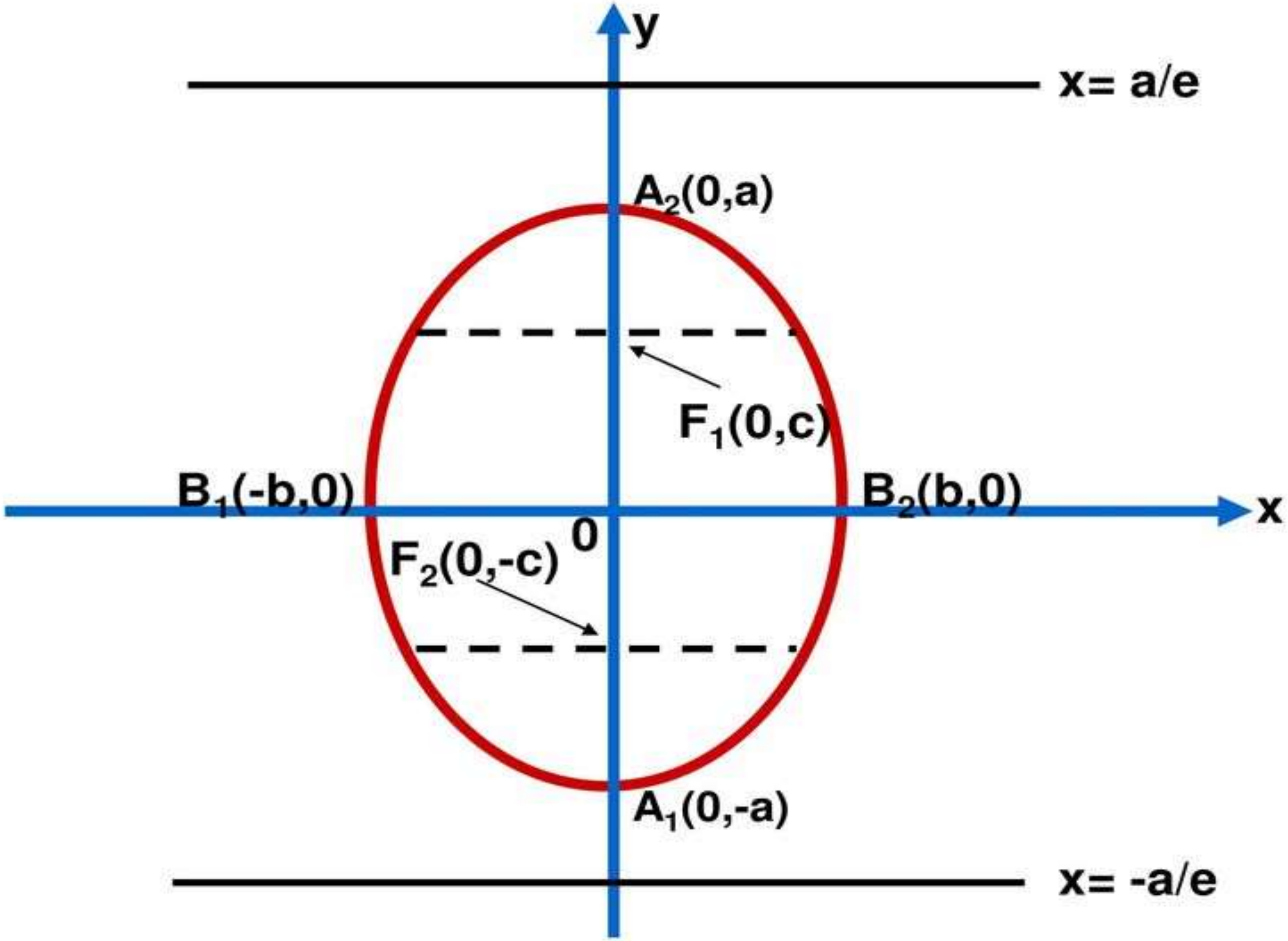
   $$a^2 > b^2 \quad \text{dan} \quad a^2 = b^2 + c^2$$

RUMUS	ELIPS HORISONTAL	ELIPS VERTIKAL
Titik puncak	(-a,0) dan (a,0)	(0,-a) dan (0,a)
Titik sb pendek	(0,-b) dan (0,b)	(-b,0) dan (b,0)
Fokus	(-c,0) dan (c,0)	(0,-c) dan (0,c)
Panjang sb pjg	2a	2a
Panjang sb pdk	2b	2b
e	c/a	c/a
Direktriks	x=-a/e dan x=a/e	y=-a/e dan y=a/e
Panjang LR	$2b^2/a$	$2b^2/a$
Titik LR	LR_1 : $(-c,-b^2/a)$ dan $(-c,b^2/a)$ LR_2 : $(c,-b^2/a)$ dan $(c,b^2/a)$	LR_1 : $(b^2/a,-c)$ dan $(-b^2/a,-c)$ LR_2 : $(b^2/a,c)$ dan $(-b^2/a,c)$

ELIPS HORISONTAL



ELIPS VERTIKAL



Persamaan Garis Singgung dan Normal Elips di Titik (x_1,y_1)

Elips	Persamaan Garis Singgung	Persamaan Garis Normal
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ $\frac{xx_1}{b^2}+\frac{yy_1}{a^2}=1$	Sama dengan perhitungan PGN pada parabola

I.4 HIPERBOLA

- **Definisi**

Hiperbola adalah **tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu mempunyai nilai yang tetap.**

Bentuk Umum Persamaan Hiperbola yang Berpusat di Titik (0,0)

1. $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ (hiperbola horisontal)

   atau

   $$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

2. $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$ (hiperbola vertikal)

   $$b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$$

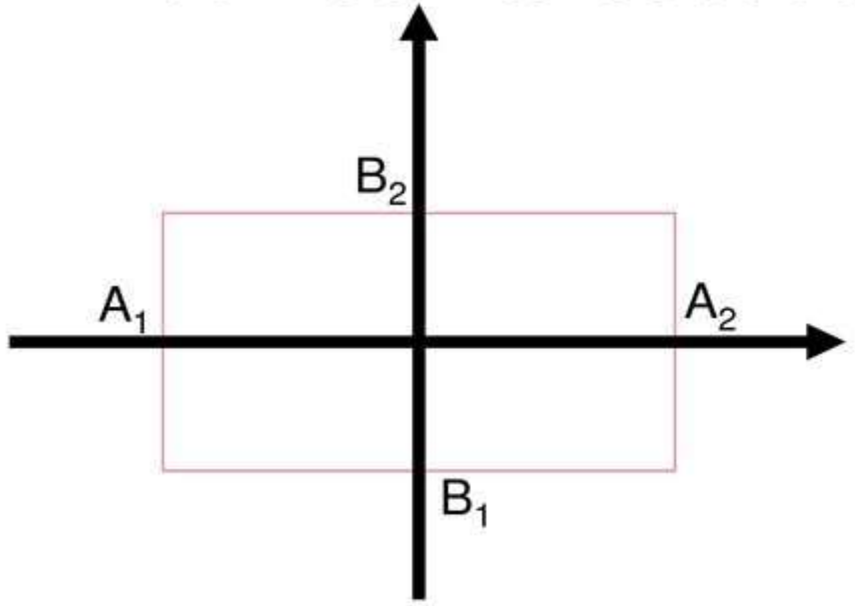
   berlaku

   $$c^2 = a^2 + b^2$$

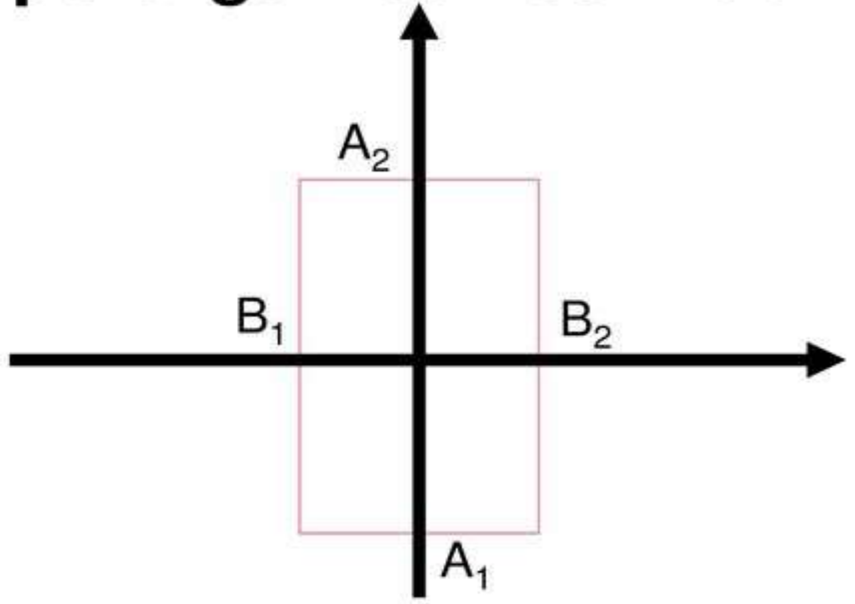
RUMUS	HIPERBOLA HORISONTAL	HIPERBOLA VERTIKAL
Titik puncak	(-a,0) dan (a,0)	(0,-a) dan (0,a)
Fokus	(-c,0) dan (c,0)	(0,-c) dan (0,c)
Titik sb minor	(0,-b) dan (0,b)	(-b,0) dan (b,0)
Panjang sb mayor	2a	2a
Panjang sb minor	2b	2b
e	c/a	c/a
Direktriks	x=-a/e dan x=a/e	y=-a/e dan y=a/e
Panjang LR	$2b^2/a$	$2b^2/a$
Titik LR	LR_1 : $(-c,-b^2/a)$ dan $(-c,b^2/a)$ LR_2 : $(c,-b^2/a)$ dan $(c,b^2/a)$	LR_1 : $(-b^2/a,c)$ dan $(b^2/a,c)$ LR_2 : $(-b^2/a,-c)$ dan $(b^2/a,-c)$
Pers. Asimtot	y=(-b/a)x dan y=(b/a)x	y=(-a/b)x dan y=(a/b)x

Bentuk Siku Empat Dasar Hiperbola

- Tentukan titik puncak A_1 dan A_2
- Tentukan titik sumbu minor B_1 dan B_2
- Gambarkan siku empat dasar yang melalui titik-titik tersebut seperti gambar berikut :

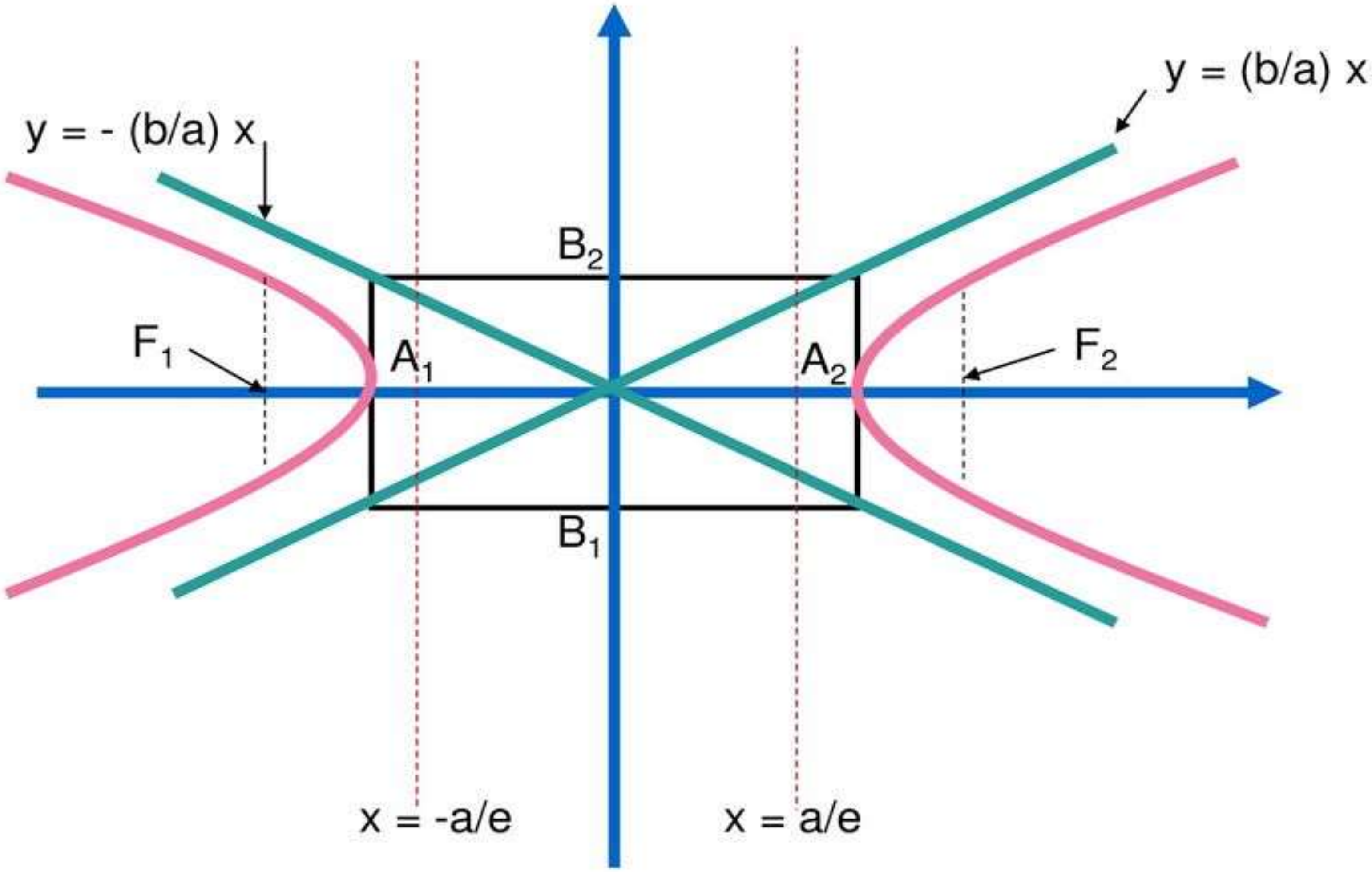


Hiperbola horisontal

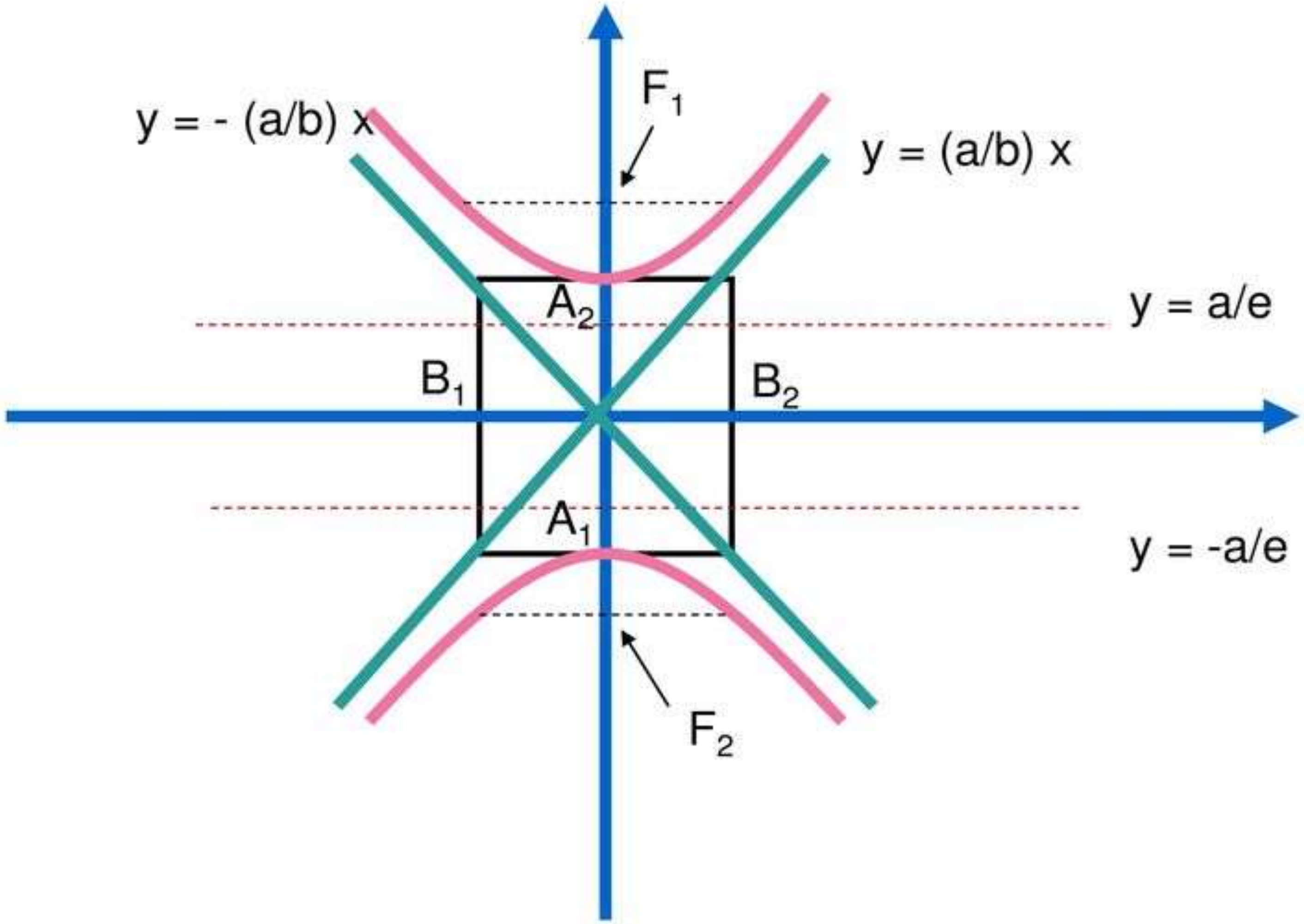


Hiperbola vertikal

HIPERBOLA HORISONTAL



HIPERBOLA VERTIKAL



Persamaan Garis Singgung dan Normal Hiperbola di Titik (x_1,y_1)

Hiperbola	Persamaan Garis Singgung	Persamaan Garis Normal
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ $\frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1$	Sama dengan perhitungan PGN pada parabola

I.5 TRANSLASI SUMBU KOORDINAT

Penyederhanaan Persamaan Hiperbola Dengan Metode Translasi

- Kelompokkan variabel x dan y di ruas kiri dan konstanta di ruas kanan.
- Keluarkan koefisien x^2 dan y^2 sehingga menjadi $k_1(x^2+ax)$ dan $k_2(y^2+by)$.
- Lengkapi kuadrat x^2+ax dan y^2+by dengan menambahkan kuadrat setengah koefisien x dan y.
- Sederhanakan persamaan sehingga konstanta di ruas kanan menjadi 1.
- Translasikan $u = x + a$ dan $v = y + b$.

Contoh :

$$4x^2 - 9y^2 - 16x + 72y - 164 = 0$$

$$4x^2 - 16x - 9y^2 + 72y = 164$$

$$4(x^2 - 4x) - 9(y^2 - 8y) = 164$$

$$4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 8y + 16) = 164 + 16 - 144$$

$$4(x-2)^2 - 9(y-4)^2 = 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

Translasi $u = x - 2$ dan $v = y - 4$

$$\frac{u^2}{9} - \frac{v^2}{4} = 1$$ merupakan persamaan hiperbola horisontal

I.6 TRANSLASI ROTASI

Penyederhanaan Suatu Persamaan Grafik $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ Setelah Rotasi

Gunakan substitusi

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta$$

$$y = u\sin\theta + v\cos\theta$$

dengan

$$\boxed{\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}}$$

Contoh :

$3x^2 + 10\,xy + 3y^2 + 8 = 0$

$A = 3,\ B = 10,\ C = 3,\ D = 8$

$\text{Cot } 2\theta = (A-C)/B$

$(3-3)/10 = 0$

$\text{Tg } 2\theta = \infty$

$2\theta = 90^0$

$\theta = 45^0$

$\text{Sin } \theta = \sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

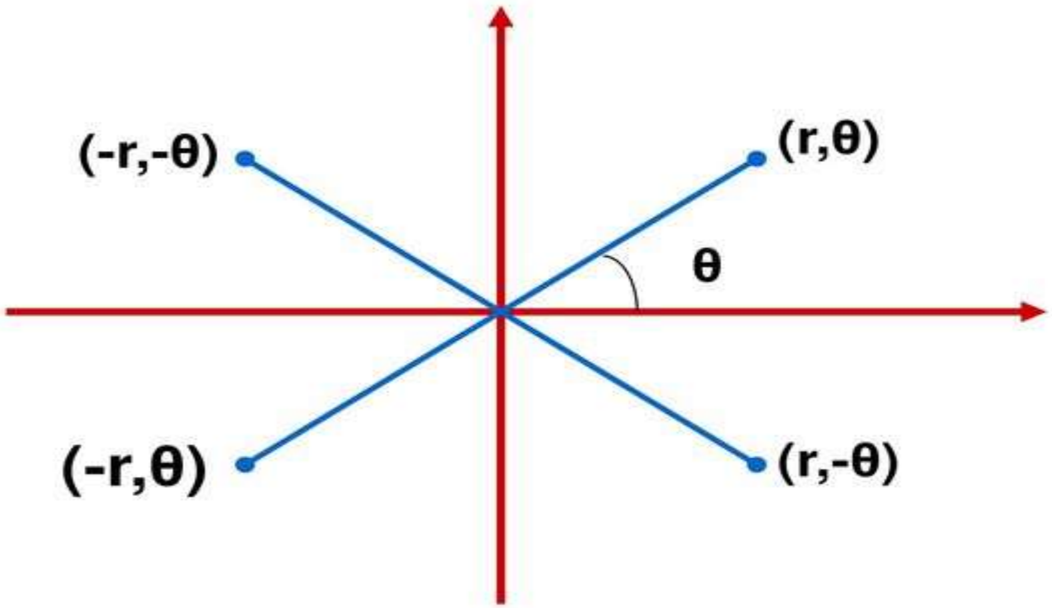
$\text{Cos } \theta = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\mathbf{x = u \cos\theta - v \sin\theta}$$
$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, u - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, v = \mathbf{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(u-v)}$$
$$\mathbf{y = u \sin\theta + v \cos\theta}$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, u + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, v = \mathbf{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(u+v)}$$

$$\mathbf{3x^2 + 10\, xy + 3y^2 + 8 = 0}$$
$$\leftrightarrow \quad 3\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(u-v)\right]^2 + 10\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(u-v)\right]\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(u+v)\right] + 3\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(u+v)\right]^2 + 8 = 0$$
$$\leftrightarrow \quad 3\left[\tfrac{1}{2}(u-v)^2\right] + 10\left[\tfrac{1}{2}(u^2-v^2)\right] + 3\left[\tfrac{1}{2}(u+v)^2\right] + 8 = 0$$
$$\leftrightarrow \quad 3/2\,(u-v)^2 + 3/2\,(u+v)^2 + 5\,(u^2 - v^2) + 8 = 0$$
$$\leftrightarrow \quad 3/2u^2 - 3uv + 3/2v^2 + 3/2u^2 + 3uv + 3/2v^2 + 5u^2 - 5v^2 + 8 = 0$$
$$\leftrightarrow \quad 8u^2 - 2v^2 = -8$$
$$\leftrightarrow \quad \mathbf{v^2/4 - u^2/1 = 1}$$ **(hiperbola vertikal)**

I.7 KOORDINAT KUTUB

- Titik Dalam Koordinat Kutub



Keempat titik tersebut adalah *pasangan koordinat kutub.*

- **Menentukan Persamaan Cartesian dari Grafik Persamaan Kutub**

Gunakan substitusi persamaan-persamaan :

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta$$

- **Menggambarkan Grafik Persamaan Kutub**

Gantikan persamaan kutub ke persamaan Cartesian

I.8 PERSAMAAN KUTUB SERTA KARTESIAN DARI GARIS, LINGKARAN, DAN KONIK

	Persamaan Kutub	Persamaan Cartesian
Garis	$r = d / \cos\theta$ $r = d / \sin\theta$	$x = d$ $y = d$
Lingkaran	$r = 2a\cos\theta$ $r = 2a\sin\theta$	Pusat (a,0), jari-jari = a $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ Pusat (0,a) , jari-jari = a $x^2 + (y-a)^2 = a^2$
Konik	$r = ed / (1 + e\cos\theta)$ $r = ed / (1 + e\sin\theta)$	d memotong sumbu x d memotong sumbu y $0<e<1$ *elips* $e = 1$ *parabola* $e > 1$ *hiperbola*