Persamaan Diferensial Orde I

EXPERT COURSE

#bimbelnyamahasiswa

Persamaan Diferensial

Definisi

- Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan fungsi yang tidak diketahui.
- Jika persamaan diferensial memiliki satu peubah tak bebas maka disebut <u>Persamaan Diferensial Biasa</u> (PDB).
- Sedangkan jika peubah bebasnya lebih dari satu dinamakan <u>Persamaan Diferensial Parsial</u>.

Persamaan Diferensial (2)

- Persamaan diferensial biasa dikatakan linear, apabila persamaan diferensial tersebut mempunyai peubah tak bebas maupun turunannya bersifat linear.
- Bentuk umum PDBL orde-n adalah sebagai berikut

  $$a_n(x)\, y^n + a_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \dots + a_0(x)\, y = f(x)$$

  dengan $a_n(x) \neq 0$ dan $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ adalah koefisien PD.
- Bila $f(x) = 0$ disebut PDBL Homogen, sebaliknya jika tidak disebut PDBL tak homogen.
- Orde PDB adalah turunan tertinggi yang terlibat dalam PDB

Contoh

(1) $\dfrac{dN}{dt} = kN$, $N = N(t)$, orde 1 dimana N peubah tak bebas
t peubah bebasnya

(2) $y' + 2\cos 2x = 0$, orde 1 dimana y peubah tak bebas
x peubah bebasnya

(3) $y'' + e^x y' + \sin xy = e^x \sin x$, orde 2

(4) $x^3 y'' + \cos 2x\,(y')^3 = x^2 y^2$, orde 2

Solusi

- Misal ada suatu persamaan diferensial dimana y sebagai peubah tak bebas yang bergantung pada peubah bebas x atau suatu fungsi $y = f(x)$ disebut solusi PDB jika fungsi $y = f(x)$ disubtitusikan ke PDB diperoleh persamaan identitas.
- Solusi umum dan solusi khusus

  Jika fungsi $y = f(x)$ memuat konstanta sembarang maka solusi disebut *solusi umum*, sebaliknya disebut *solusi khusus.*

Contoh

(1) $y = \cos x + c$ ⓪ solusi umum

Persamaan Diferensial $y' + \sin x = 0$

Karena

$(\cos x + c)' + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$

(2) $y = \cos x + 6$ ⓪ solusi khusus

Persamaan Diferensial $y' + \sin x = 0$

Karena

$(\cos x + 6)' + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$

PDB Orde 1

- PDB terpisah
- PDB dengan koefisien fungsi homogen
- PDB Linier

PDB terpisah

- PDB yang dapat dituliskan dalam bentuk :
  g(y) dy = f(x) dx disebut PDB terpisah.

  Penyelesaian : integralkan kedua ruas

Contoh : tentukan solusi umum PD

1. $(x \ln x)\, y' = y$, $(y' = \dfrac{dy}{dx})$
2. $y^1 = x^3 e^{-y}$, $y(2) = 0$

Contoh

1. Jawab:

$(x \ln x)\ y' = y$

$$x \ln x \frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\ln y = \ln(\ln x) + \ln c$$

$$\ln y = \ln c(\ln x)$$

$$y = c(\ln x)$$

Jadi solusi umum PD tersebut adalah

$$y = c(\ln x)$$

Contoh

2. Jawab:

$y' = x^3 e^{-y}$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 e^{-y}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = x^3 dx$$

$$\int e^y dy = \int x^3 dx$$

$$e^y = \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$y = \ln\left(\frac{1}{4}x^4 + c\right)$$

Diketahui $y(2) = 0$, sehingga

$$0 = \ln\left(\frac{1}{4}(2)^4 + c\right)$$

$$1 = 4 + c \rightarrow c = -3$$

Jadi solusi khusus PD tersebut adalah

$$y = \left(\ln\frac{1}{4}x^2 - 3\right)$$

Latihan

Tentukan solusi Persamaan diferensial dibawah ini

1. $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2}$$

2. $$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

3. $$y' = \frac{x^2}{y(1 + x^3)}$$

4. $$y' = 1 + x + y^2 + xy^2$$

5. $$y' = (1 + 2y)(1 + x^2 + 2x^3)$$

6. $$y' = 2(1 + x)(1 + y^2),\; y(0) = 0$$

7. $$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + 2y^2}, \quad y(0) = 1$$

8. $$(1 + e^x)\frac{dy}{dx} + e^x y = 0,\; y(0) = 1$$

Fungsi homogen

- Fungsi $A(x,y)$ disebut fungsi homogen dengan derajat n, jika

$$A(kx,ky) = k^n A(x,y),$$

  k konstan sembarang
- Contoh :

  Periksa apakah fungsi berikut homogen atau tidak !

  1. $A(x,y) = x + y$

     $A(kx,ky) = kx + ky$

     $= k\,(x + y) = k\,A(x,y)$

     $A(x,y) = x + y$, fungsi homogen dengan derajat 1
  2. $A(x,y) = x^2 + xy$

     $A(kx,ky) = k^2x^2 + kx\,ky$

     $= k^2\,(x^2+xy) = k^2\,A(x,y)$

     $A(x,y) = x^2 + xy$, fungsi homogen dengan derajat 2

PD dengan koefisien fungsi homogen

- PDB yang dapat dituliskan dalam bentuk $y' = \dfrac{A(x,y)}{B(x,y)}$

  dengan A,B fungsi homogen dengan derajat yang sama disebut ***<u>PDB dengan koefisien fungsi homogen.</u>***

  Penyelesaian : gunakan subtitusi y = ux, u = u(x)

  dengan
  $$y' = u'x + u$$
  $$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$
  $$dy = x\,du + u\,dx$$

Contoh

Selesaikan solusi persamaan diferensial berikut

1. $y^1 = \dfrac{x+y}{x}$

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

Misalkan $y = ux$, sehingga $dy = x\,du + u\,dx$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow \frac{x\,du + u\,dx}{dx} = 1 + u \rightarrow x\,du + u\,dx = (1+u)dx \rightarrow$$

$$x\,du = dx \rightarrow du = \frac{dx}{x} \rightarrow \int du = \int \frac{dx}{x} \rightarrow u = \ln x + c \rightarrow$$

$$\frac{y}{x} = \ln x + c \rightarrow y = x \ln x + c\,x$$

Jadi solusi umum dari PD di atas adalah $y = x \ln x + c\,x$

Contoh

2. $x^2\dfrac{dy}{dx} - y^2 - 2xy = 0$, $y(1)=1$

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

Misalkan $y = ux$, sehingga $dy = x\,du + u\,dx$

$$\frac{x\,du + u\,dx}{dx} = u^2 + 2u \rightarrow x\,du + u\,dx = \left(u^2+2u\right)dx \rightarrow$$

$$x\,du = \left(u^2+u\right)dx \rightarrow \frac{du}{u^2+u} = \frac{dx}{x} \rightarrow \int\frac{du}{u^2+u} = \int\frac{dx}{x} \rightarrow$$

$$\int\frac{du}{u(u+1)} = \ln x + \ln c \rightarrow \int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = \ln cx \rightarrow \ln u - \ln(u+1) = \ln cx$$

Contoh (no.2 lanjutan)

$$\rightarrow \ln\left(\frac{u}{u+1}\right) = \ln cx \quad \rightarrow \ln\left(\frac{y/x}{y/x+1}\right) = \ln cx$$

$$\rightarrow \ln\left|\frac{y}{y+x}\right| = \ln cx \quad \rightarrow \frac{y}{y+x} = cx \quad \rightarrow y(1-cx) = cx^2$$

$$\rightarrow \quad y = \frac{cx^2}{1-cx}$$

Diketahui $y(1) = 1$, sehingga

$$1 = \frac{c}{1-c} \quad \rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$$

Jadi solusi khusus PD di atas adalah $y = \dfrac{x^2}{2-x}$

Latihan

Tentukan solusi Persamaan diferensial dibawah ini

1. $2y\,dx - x\,dy = 0$
2. $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$$
3. $$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$
4. $$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{x - y}$$
5. $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$
6. $$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y}{2x + y}$$
7. $$\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y}$$

PDB Linier

PDB yang dapat dituliskan dalam bentuk:

$$y^1 + P(x)\, y = r(x)$$

disebut PDBlinier.

Penyelesaian : kalikan kedua ruas dengan **faktorintegral**

$$e^{\int P(x)dx}$$

Kemudian, kalikan kepada kedua ruas, sehinggadiperoleh:

$$y^1 e^{\int P(x)dx} + P(x)y\, e^{\int P(x)dx} = r(x)\, e^{\int P(x)dx}$$

$$\left(ye^{\int P(x)dx}\right)^1 = r(x)\, e^{\int P(x)dx}$$

Integralkan kedua ruas

$$ye^{\int P(x)dx} = \int r(x)\, e^{\int P(x)dx} dx + c$$

Solusi Umum PDB

Contoh

Selesaikan persamaan diferensial dibawah ini

1. $xy' - 2y = x^3 e^x$

   Jawab:

   $y' - \frac{2}{x} y = x^2 e^x$ (bagi kedua ruas dengan x)

   Sehingga diperoleh faktor integrasi:

$$e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

   kalikan kedua ruas dengan x^{-2}, yaitu:

$$\frac{1}{x^2} y' - \frac{2}{x^3} y = e^x \rightarrow \left(\frac{1}{x^2} y\right)^1 = e^x \rightarrow \frac{1}{x^2} y = e^x + c \rightarrow$$

$$y = x^2 e^x + c\,x^2$$

   Jadi solusi umumnya adalah $y = x^2 e^x + c\,x^2$

Contoh

Selesaikan persamaan diferensial dibawah ini

2. $y' + y = (x + 1)^2$, $y(0) = 3$

Jawab:

Faktor integrasi dari PD di atas adalah:

$$e^{\int 1 dx} = e^x$$

kalikan kedua ruas dengan e^x, yaitu:

$$e^x y' + e^x y = e^x (x+1)^2 \rightarrow \quad (e^x y)' = e^x (x^2+1) \rightarrow$$

$$e^x y = \int e^x (x+1)^2 dx \quad \rightarrow \quad e^x y = (x+1)^2 e^x - \int 2(x+1) e^x dx \rightarrow$$

$$e^x y = (x+1)^2 e^x - 2(x+1) e^x + 2e^x + c$$

sehingga $y = (x+1)^2 - 2(x+1) + 2 + ce^{-x} \rightarrow \quad y = x^2 + 1 + ce^{-x}$

Contoh (no. 2 Lanjutan)

Diketahui $y(0) = 3$, sehingga

$$3 = 1 + c \rightarrow c = 2$$

Jadi solusi khusus PD di atas adalah $y = x^2 + 1 - 2e^{-x}$

Latihan

Selesaikan persamaan diferensial di bawah ini:

1. $y' + 2y = e^{-x}$
2. $(x+1)y' + y = x^2 - 1$
3. $y' + y\tan x = \sec x$
4. $y' + \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^2$
5. $y' + 2y = x^2$
6. $xy^1 + (1+x)y = e^{-x}, \quad y(1) = 0$
7. $\sin x \; y' + 2y\cos x = \sin 2x, \; y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$

Trayektori Ortogonal

- Masalah dalam TO ini adalah bagaimana mendapatkan keluarga kurva yang ortogonal atau tegak lurus terhadap keluarga kurva lain.
- Cara untuk mendapatkan trayektori ortogonal dari suatu kurva adalah sebagai berikut:
  - Turunkan secara implisit f(*x*,*y*) = c terhadap *x*, nyatakan parameter c dalam *x* dan *y*.
  - Karena tegak lurus maka trayeksi Ortogonal (TO) harus memenuhi:

$$y^1 = -\frac{1}{Df(x,y)}$$

- Trayektori Ortogonal dari f(*x*,*y*) = c, didapatkan dengan mencari solusi dari

$$y^1 = -\frac{1}{Df(x,y)}$$

Contoh

Tentukan trayektori ortogonal dari keluarga kurva $y = cx^2$

Jawab:

Langkah-langkah menentukan TO :

1. Tuliskan $y = cx^2$ dalam bentuk $c = \frac{y}{x^2}$

   Kemudian turunkan $y = cx^2$ yaitu:

   $$y' = 2cx \rightarrow y' = 2x\left(\frac{y}{x^2}\right) \rightarrow y' = 2\frac{y}{x}$$

2. TO akan memenuhi PD

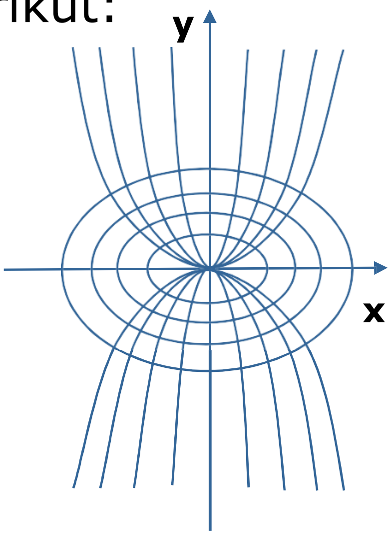
   $$y^1 = -\frac{1}{2y/x} = -\frac{x}{2y}$$

Contoh (lanjutan)

3. TO dari $y = cx^2$ adalah solusi dari PD berikut:

$$y^1 = -\frac{x}{2y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \rightarrow$$

$$\int 2y\,dy = \int -x\,dx \rightarrow y^2 = -\frac{x^2}{2} + c \rightarrow$$



$$\frac{x^2}{2} + y^2 = c \Rightarrow (ellips)$$

Jadi keluarga yang tegak lurus terhadap parabola $y = cx^2$ adalah $\frac{x^2}{2} + y^2 = c \Rightarrow (ellips)$

Latihan

Tentukan solusi trayektori ortogonal dari keluarga kurva berikut :

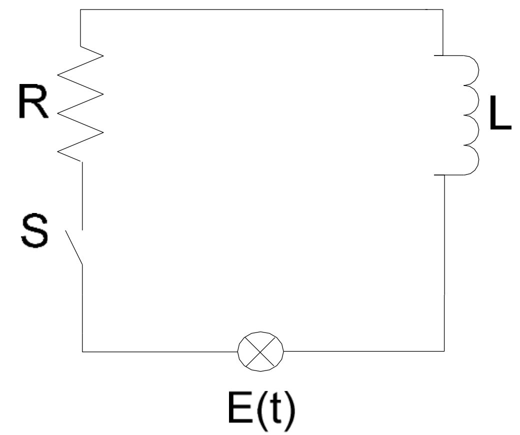
1. $x^2 + y^2 = c^2$
2. $x^2 - y^2 = c^2$
3. $y = cx$
4. $y = \sqrt{x + c}$
5. $4x^2 + y^2 = c$

PENGGUNAAN PD ORDE I

EXPERT COURSE
#bimbelnyamahasiswa

Penerapan dalam Rangkaian Listrik

Sesuai dengan Hukum Kirchhoff, rangkaian listrik sederhana (gambar samping) yang mengandung sebuah tahanan sebesar *R* ohm dan sebuah kumparan sebesar *L* Henry dalam rangkaian seri dengan sumber gaya elektromotif (sebuah baterai atau generator) yang menyediakan suatu voltase *E(t)* volt pada saat t memenuhi



$$L\,I'(t) + R\,I(t) = E(t)$$

Dengan I adalah arus listrik dalam ampere.

Contoh

1. Tentukan arus I sebagai fungsi dari waktu t dari suatu rangkaian RL dengan R = 6 ohm, L = 2 henry dan sebuah baterai yang menyediakan voltase sebesar E = *12* Volt dan diasumsikan saat awal arusnya adalah nol (I = 0 pada saat t = 0, jika saklar S ditutup).

Jawab

Persamaan diferensialnya adalah

$$2I' + 6I = 12$$

Atau bisa disederhanakan menjadi

$$I' + 3I = 6$$

Contoh (Lanjutan)

Kemudian kedua ruas kalikan dengan faktor integrasi e^{3t}

Kita peroleh

$$I = e^{-3t}\left(2e^{3t} + C\right) = 2 + C\,e^{-3t}$$

Syarat awal, $I = 0$ pada saat $t = 0$, memberikan $C = -2$

Sehingga,

$$I = 2 - 2e^{-3t}$$

Contoh

2. Dari contoh sebelumnya baterai diganti dengan generator arus bolak – balik dengan *E = 12* sin *9t* Volt dan diasumsikan saat awal arusnya adalah nol (I = 0 pada saat *t* = 0, jika saklar *S* ditutup).

Jawab

Persamaan diferensialnya adalah

$$2I' + 6I = 12\sin 9t$$

Atau bisa disederhanakan menjadi

$$I' + 3I = 6\sin 9t$$

Kemudian kedua ruas kalikan dengan faktor integrasi e^{3t}

Kita peroleh

$$I = e^{-3t}\left(\int 6\,e^{3t}\sin 9t\,dt\right)$$

Contoh (Lanjutan)

Dengan integral parsial, didapat hasil integralnya adalah

$$I = e^{-3t}\left(\frac{6e^{3t}}{9+81}\left(3 Sin\, 9t - 9\, Cos\, 9t\right) + C\right)$$

Jadi,

$$I = \frac{1}{5}\sin 9t - \frac{3}{5}\cos 9t + C\, e^{-3t}$$

Syarat awal, $I = 0$ pada saat $t = 0$, memberikan

$$0 = -\frac{3}{5} + C \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \frac{3}{5}$$

Sehingga,

$$I = \frac{1}{5}\sin 9t - \frac{3}{5}\cos 9t + \frac{3}{5}e^{-3t}$$

Latihan

1. Tentukan arus I sebagai fungsi dari waktu t dari suatu rangkaian RL dengan $R = 10^6$ ohm, $L = 1$ henry dan sebuah sumber gaya elektromotif yang menyediakan voltase sebesar $E = 1$ Volt dan diasumsikan saat awal arusnya adalah nol ($I = 0$ pada saat $t = 0$, jika saklar S ditutup).
2. Tentukan arus I sebagai fungsi dari waktu t dari suatu rangkaian RL dengan $L = 3{,}5$ Henry dan sebuah sumber gaya elektromotif yang menyediakan voltase sebesar $E(t) = 120 \sin 377t$ Volt dan diasumsikan saat awal arusnya adalah nol ($I = 0$ pada saat $t = 0$, jika saklar S ditutup).

Latihan

3. Tentukan arus I sebagai fungsi dari waktu t dari suatu rangkaian RL dengan R = 1000 ohm dan sebuah sumber gaya elektromotif yang menyediakan voltase sebesar $E(t)$ = 120 sin 377 t Volt dan diasumsikan saat awal arusnya adalah nol (I = 0 pada saat t = 0, jika saklar S ditutup).
4. Tentukan arus I sebagai fungsi dari waktu t dari suatu rangkaian RL dengan R = 1000 ohm, L = 3,5 henry dan sebuah sumber gaya elektromotif yang menyediakan voltase sebesar $E(t) = 120$ sin 377t Volt dan diasumsikan saat awal arusnya adalah nol (I = 0 pada saat t = 0, jika saklar S ditutup).