MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2016/2017

7 April 2017

Kuliah yang Lalu

13.1 Integral Lipat Dua atas Persegi Panjang

13.2 Integral Berulang

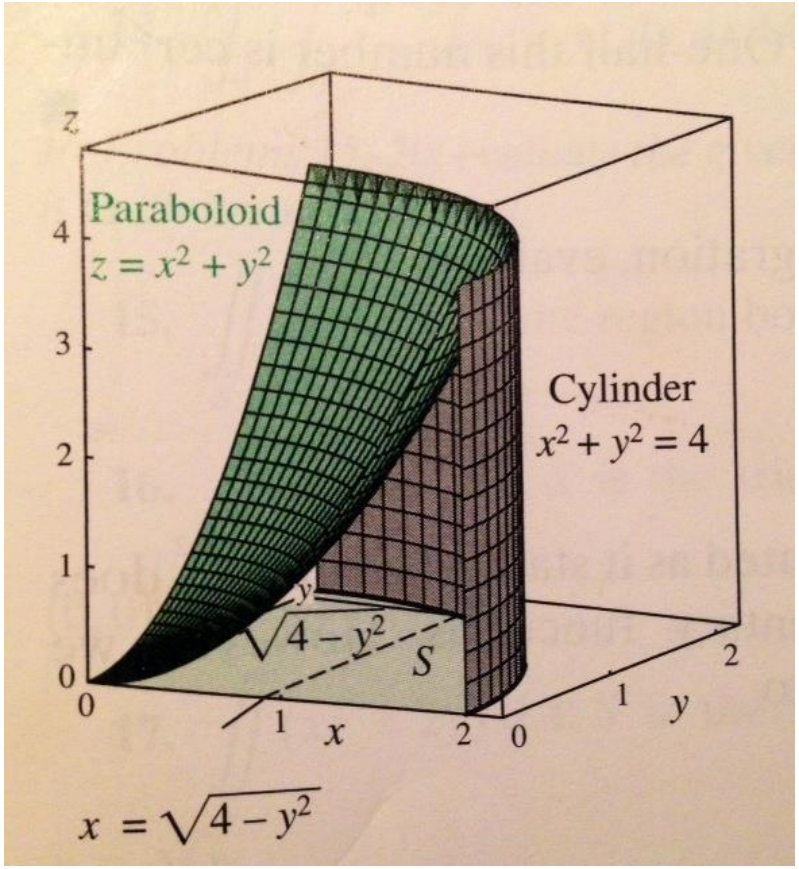
13.3 Integral Lipat Dua atas Daerah Bukan Persegi Panjang

13.4 Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar

13.5 Penggunaan Integral Lipat Dua

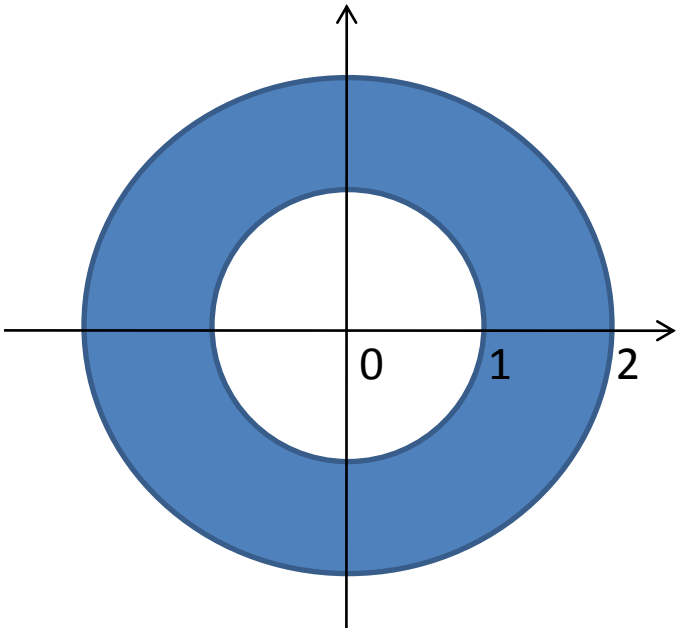
Soal 1

Tentukan volume benda pejal yang terletak di Oktan I dan dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + y^2$, tabung $x^2 + y^2 = 4$, dan bidang-bidang koordinat.



Soal 2

Hitung $\iint_S x^2 dA$ apabila S adalah daerah cincin yg dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$.



Soal 1 dan 2 lebih mudah dikerjakan dlm koordinat polar!

Kuliah Hari Ini

13.1 Integral Lipat Dua atas Persegi Panjang

13.2 Integral Berulang

13.3 Integral Lipat Dua atas Daerah Bukan Persegi Panjang

10.5 Sistem Koordinat Polar

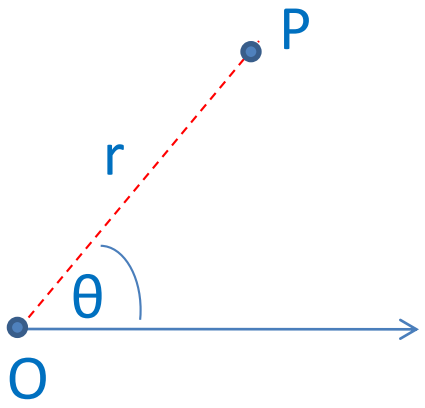
13.4 Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar

13.5 Penggunaan Integral Lipat Dua

Sistem Koordinat Polar

Sistem koordinat polar terdiri dari **sumbu polar** (berupa setengah garis, yang berimpit dengan sumbu-x positif pada bidang $\mathbf{R}^2$) dan **titik asal** O.

Setiap titik P pada bidang kemudian dinyatakan dengan jaraknya dari O, sebutlah r, dan besar sudut θ yang dibentuk oleh ruas garis OP dan sumbu polar (dihitung *berlawanan arah dengan arah jarum jam*).



$P = P(r,\theta)$

Hubungan Koordinat Polar dan Koordinat Cartesius

Jika $P = P(r,\theta)$, maka P dapat dinyatakan dalam koordinat Cartesius sebagai $P = P(x,y)$ dengan

$$x = r\cos\theta \quad \text{dan} \quad y = r\sin\theta.$$

Sebaliknya, jika $P = P(x,y)$, maka P dapat dinyata-kan dalam koordinat polar $P = P(r,\theta)$ dengan

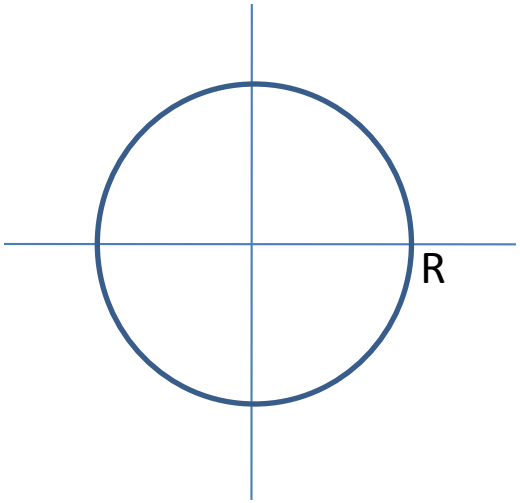
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{dan} \quad \tan\theta = y/x,$$

dengan penafsiran nilai θ yg tepat untuk $x = 0$.

Persamaan Kurva dalam Koordinat Polar

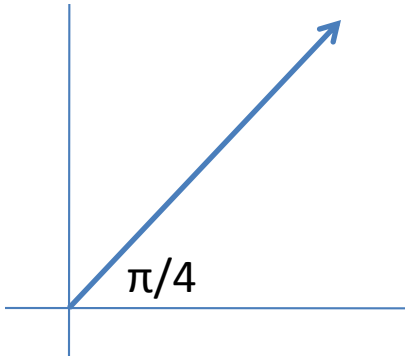
Persamaan lingkaran yang ber-pusat di O dan berjari-jari R dapat dinyatakan secara sederhana dalam koordinat polar sebagai

$$r = R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$



Persamaan setengah garis $y = x$, dengan $x > 0$, dapat dinyatakan dalam koordinat polar sebagai

$$\theta = \pi/4, \quad r > 0.$$



Latihan

1. Gambar kurva $r = \sin 3\theta$.

2. Buktikan bahwa persamaan $r = 8 \cos \theta$ merupakan persamaan lingkaran yang berpusat di titik (4,0) dan berjari-jari 4. (*Petunjuk*. Kalikan kedua ruas dengan r.) Gambar lingkaran tsb pd bidang.

Soal

Gambarlah (pada bidang) daerah yang terletak

(i) di dalam lingkaran $r = 4$ dan juga di dalam lingkaran $r = 8 \cos \theta$.

(ii) di dalam lingkaran $r = 4$ dan di luar lingkaran $r = 8 \cos \theta$.

(iii) di luar lingkaran $r = 4$ dan di dalam lingkaran $r = 8 \cos \theta$.

MA1201 MATEMATIKA 2A

13.4 INTEGRAL LIPAT DUA DALAM KOORDINAT POLAR

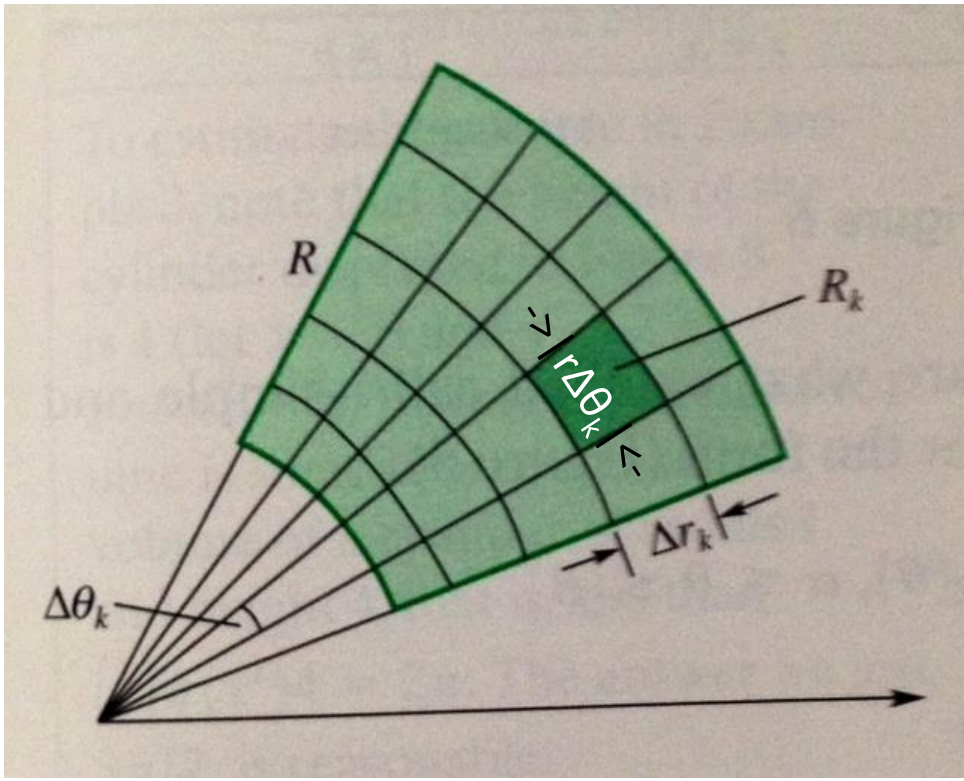
Menghitung integral lipat dua dalam **koordinat polar**

Elemen Luas dalam Koordinat Polar

Bila dalam koordinat Cartesius elemen luas ΔA sama dengan $\Delta x.\Delta y$, maka dalam koordinat polar

$$\Delta A = r.\Delta r.\Delta\theta.$$

Dari mana datangnya rumus ini? Lihat gambar di samping.



Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar

Dengan substitusi $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, integral lipat dua yang semula dinyatakan dalam koordinat Cartesius sekarang dinyatakan dalam koordinat polar sebagai:

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Catatan: Dalam koordinat polar, daerah seperti setengah lingkaran atau cincin setara dengan "persegi panjang".

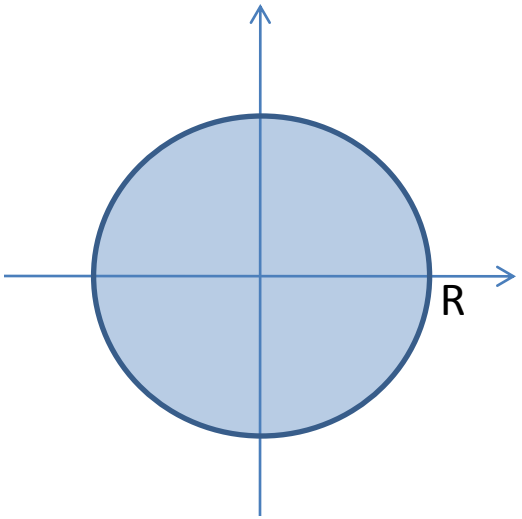
Daerah dalam Koordinat Polar

Daerah cakram lingkaran

$$S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$$

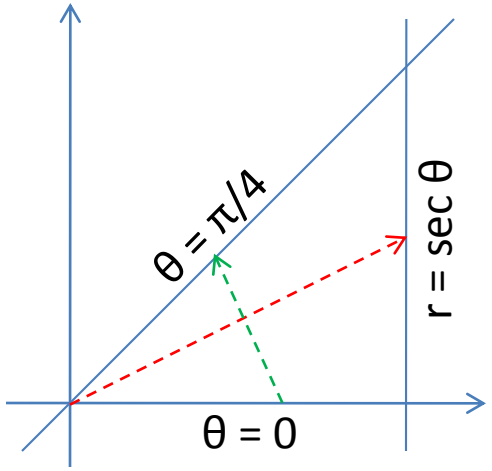
dapat dinyatakan sebagai

$$S = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$



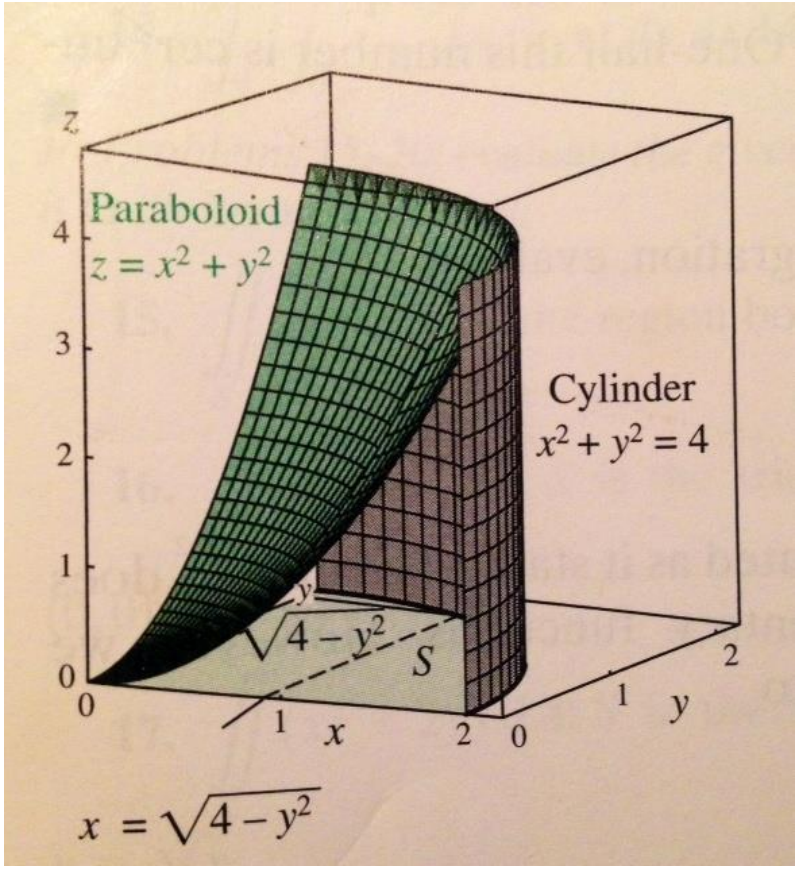
Daerah segitiga yang dibatasi oleh sumbu-x, garis $y = x$, dan garis $x = 1$, merupakan daerah r-sederhana, dengan

$$0 \le r \le \sec\theta,\ 0 \le \theta \le \pi/4.$$



Contoh 1

Tentukan volume benda pejal yang terletak di Oktan I dan dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + y^2$, tabung $x^2 + y^2 = 4$, dan bidang-bidang koordinat.



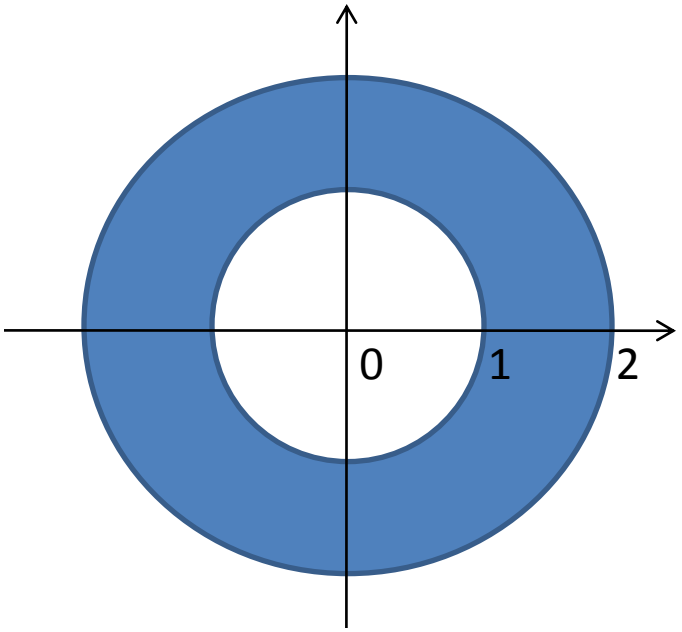
Jawab: $V = \iint_S (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 r\,dr\,d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} 4\,d\theta = 2\pi$$

Contoh 2

Hitung $I = \iint_S x^2 dA$ apabila

S adalah daerah cincin yg dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$.



Jawab: $I = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \cos^2\theta . r dr d\theta$

= ...

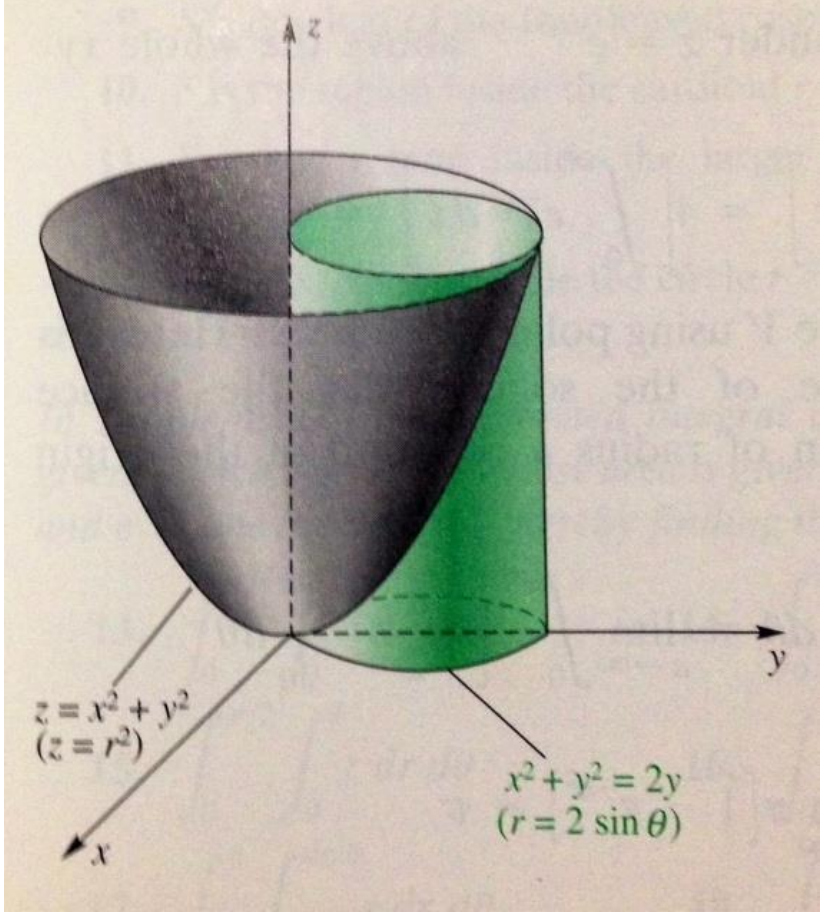
Soal 1

Hitung $I = \iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dA$ bila S adalah daerah segitiga yang dibatasi oleh sumbu-x, garis $y = x$, dan garis $x = 1$.

Jawab: I = …

Soal 2

Tentukan volume benda pejal yang dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + y^2$, tabung $x^2 + y^2 = 2y$, dan bidang-XOY.



Jawab: V = …

Soal 3

Tentukan volume benda pejal yang dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + y^2$ dan setengah bola bagian atas $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ $(z > 0)$.

Jawab: V = …

Soal 4

Buktikan bahwa $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dydx = \frac{\pi}{4}.$

Jawab: