Turunan Parsial

- Misalkan $z = f(x, y)$ adalah fungsi variabel bebas x dan y. Karena x dan y bebas,
- (i). dapat dimungkinkan x yang berubah-ubah (variabel), sementara y dianggap tetap (konstanta),
- (ii).dapat dimungkinkan y berubah-ubah (variabel) sementara x dianggap tetap (konstanta),
- (iii). dapat dibolehkan x dan y keduanya berubah bersama-sama. Pada dua keadaan pertama, z merupakan fungsi variabel tunggal dan dapat diturunkan menurut aturan-aturan yang biasa.

- Jika *x* berubah sedangkan *y* dianggap tetap, z adalah fungsi *x* dan turunannya ke *x.*

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

disebut *turunan (pertama) parsial dari z = f(x, y) ke x.*

Jika *y* berubah sedangkan *x* dianggap tetap, z adalah fungsi *y* dan turunannya ke *y.*

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Contoh 1 :

$Z = 2x^2 – 3\ xy + 4y^2$

Perlakukan y sebagai konstan dan turunkan ke x, didapat : $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x – 3y$

Perlakukan x sebagai konstan dan turunkan ke y, didapat : $\frac{\partial z}{\partial y} = - 3x + 8y$

Contoh 2

$$z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$$

Perlakukan y sebagai konstan dan turunkan ke x, didapat :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2}$$

Perlakukan x sebagai konstan dan turunkan ke y, didapat :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{2y}{x}$$

Contoh 3 :

Luas segitiga diberikan sebagai K = ½ ab sin C. Jika a = 20, b = 30 dan C = 30°. carilah :

a. Laju perubahan K terhadap a, jika b dan C konstan

b. Laju perubahan K terhadap C, jika a dan b konstan

c. Laju perubahan b terhadap a, jika K dan C konstan

$$(a).\ \frac{\partial K}{\partial a} = \frac{1}{2} b \sin C = \frac{1}{2}(30)(\sin 30^0) = \frac{15}{2}$$

$$(b).\ \frac{\partial K}{\partial C} = \frac{1}{2} ab \cos C = \frac{1}{2}(20)(30)(\cos 30^0) = 150\sqrt{3}$$

$$(c).\ b = \frac{2K}{a \sin C}; \frac{\partial b}{\partial a} = -\frac{2K}{a^2 \sin C} = -\frac{2(\frac{1}{2} ab \sin C)}{a^2 \sin C} = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$$

Contoh 4 :

Carilah turunan parsial pertama dari z terhadap variabel-variabel bebas x dan y

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$

Penyelesaian 1 :

Selesaikan z untuk mendapatkan z = $\pm\sqrt{25 - x^2 - y^2}$

Maka :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\pm\sqrt{25 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{z}$$ dan $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\pm\sqrt{25 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z}$$

TURUNAN PARSIAL TINGKAT TINGGI.

Turunan parsial $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

dari z = *f(x, y)* dapat diturunkan parsial lagi ke *x* dan ke *y*, menghasilkan turunan parsial kedua :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

dan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Dengan cara yang sama dari $\frac{\partial z}{\partial y}$ dapat diperoleh :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ dan } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Jika z = f(x, y) dan turunan parsialnya kontinu, urutan diferensiasi tak menjadi soal, yaitu :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Contoh : Z = $x^2 + 3xy + y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2$$

Latihan Soal

1. Masing-masing fungsi berikut ini, carilah $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

   a. $z = x^2 + 3xy + y^2$

   b. $z = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}$

   c. $z = \sin 3x \cos 4y$

   d. $x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$

2. Untuk masing-masing fungsi berikut, carilah

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

a. $z = 2x^2 - 5\,xy + y^2$

b. $z = \sin 3x \cos 4y$

c. $z = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}$

Diferensial Total dan Turunan Total

Perhatikan fungsi dua variabel bebas *x* dan y, z = *f(x, y),* dan definisikan dx = Δx dan dy = Δy. Bila x berubah, sedangkan *y* tetap, z merunakan fungsi *x* saja dan *diferensial parsial z terhadap x* didefinisikan sebagai :

$$d_x\, z = f_x(x,y)dx = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx$$

Dengan cara sama, diferensial parsial z terhadap y didefinisikan oleh $d_y z = f_y\,(x, y)\, dy = \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$

Diferensial total dz didefinisikan sebagai jumlah diferensial parsialnya, yaitu,

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy}$$

Untuk fungsi w = f(x, y, z, ……………,t) diferensial total didefinisikan sebagai :

$$\boxed{dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \ldots\ldots\ldots\ \ldots. + \frac{\partial w}{\partial t} dt}$$

Contoh 1 :

Carilah diferensial totalnya : $z = x^3y + x^2y^2 + xy^3$

Penyelesaian :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + 2xy^2 + y^3 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2x^2y + 3xy^2$$

Maka $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$= (3x^2y + 2xy^2 + y^3)\,dx + (x^3 + 2x^2y + 3xy^2)\,dy$$

diferensial total fungsi variabel banyak memberikan suatu pendekatan yang baik dari pertambahan total fungsi itu

Contoh 2 :

Di dalam mengukur balok persegi panjang, dimensi yang didapatkan 25, 30, dan 50 cm dengan kemungkinan kesalahan 0,125 cm pada setiap pengukuran. Cari perkiraan kesalahan maksimum pada luas permukaan balok dan persentase kesalahan luas yang disebabkan oleh kesalahan masing-masing pengukuran ?

Penyelesaian :

Luas pengukuran S = 2(xy + yz + xz), maka

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy + \frac{\partial S}{\partial z}dz$$

$$= 2\,(y + z)\,dx + 2(x + z)\,dy + 2(y + x)\,dz$$

Kesalahan terbesar dari S akan muncul bila kesalahan tiap-tiap pengukuran mempunyai tanda yang sama, misalnya positif. Maka :

dS = 2(30 + 50)(0, 125) + 2(25 + 50)(0,125) + 2(30 + 25)(0,125) = 52, 5 cm^2

Persentase kesalahan (kesalahan/luas)(100) = 5250/700 = 0, 75 %

ATURAN RANTAI UNTUK FUNGSI BERSUSUN.

Jika z = f(x, y) suatu fungsi kontinu dari variabel-variabel x. y. dengan turunan parsialnya $\partial z/\partial x$ dan $\partial z/\partial y$, kontinu, dan jika x dan y merupakan fungsi variabel t yang diferensiabel x = g(t), y = h(t), maka z adalah fungsi t dan dz/dt, disebut turunan total z ke t, dinyatakan oleh ,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Dengan cara yang sama, w = f(x , y , z, ...) adalah fungsi yang kontinu dari variabel-variabel x, y, z ,...... dengan turunan parsial yang kontinu dan jika x, y, z , ... merupakan fungsi variabel t yang diferensiabel, turunan total w ke t dinyatakan oleh :

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \ldots\ldots\ldots}$$

Jika z = f(x, y) adalah fungsi variable x dan y yang kontinu dengan turunan parsialnya ∂z/∂x dan ∂z/∂y yang kontinu dan jika x dan y merupakan fungsi-fungsi kontinu x = g(r, s), y = h(r, s) dari variable bebas r dan s, maka z merupakan fungsi r dan s dengan :

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Dengan cara yang sama, jika w = f(x, y, z, …….) merupakan fungsi kontinu dari n variable x, y, z, …… dengan turunan parsialnya ∂w/∂x, ∂w/∂y, ∂w/∂z …… yang kontinu dan jika x, y, z,……. Merupakan fungsi yang kontinu dari m variable bebas r, s, t,……, maka :

$$\frac{dw}{dr} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dr} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dr} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{ds} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Contoh 3 : Cari dz/dt, bila diketahui

$Z = x^2 + 3xy + 5y^2$, $x = \sin t$, $y = \cos t$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 10y$,

$\frac{dx}{dt} = \cos t$, $\frac{dy}{dt} = -\sin t$

Maka , $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

= (2x + 3y) cos t – (3x + 10 y) sin t

Contoh 4 : Carilah dz/dt, bila diketahui

$z = \ln (x^2 + y^2)$, $x = e^{-t}$ dan $y = e^t$

Penyelesaian :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{dx}{dt} = -e^{-t} \quad \frac{dz}{dt} = e^t$$

Maka, $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

Maka :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - e^{-t} + \frac{2x}{x^2 + y^2} e^{t} = 2\frac{ye^{t} - xe^{-t}}{x^2 + y^2}$$