

Bab 7: Filter Digital

1 Struktur Filter Digital

Tujuan Belajar 1

Peserta mengerti issue yang terkait dengan struktur implementasi dari sistem LCCDE.

Karakteristik sistem LCCDE dinyatakan dalam persamaan perbedaan:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Dengan transformasi-z, fungsi sistem LCCDE dinyatakan:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Dari persamaan di atas, diperoleh zero dan pole, yang tergantung dari pemilihan parameter sistem $\{b_k\}$ dan $\{a_k\}$ dan menentukan respon frekuensi dari sistem.

Struktur yang terbentuk dari persamaan sistem LCCDE mengandung hubungan antara elemen delay, multiplier, dan adder.

Faktor yang mempengaruhi pemilihan struktur realisasi sistem filter:

- Kompleksitas komputasi
 - a. Aritmetic operations per sample
 - b. Memory access per sample
- Kebutuhan memori : jumlah lokasi memori yang dibutuhkan untuk menyimpan parameter sistem
- Efek *finite-word-length* : berkaitan dengan efek kuantisasi dalam implementasi sistem digital

1.1 Direct Form Tipe 1 dan 2

Tujuan Belajar 2

Peserta mengerti struktur IIR berbentuk Direct Forms 1 dan 2.

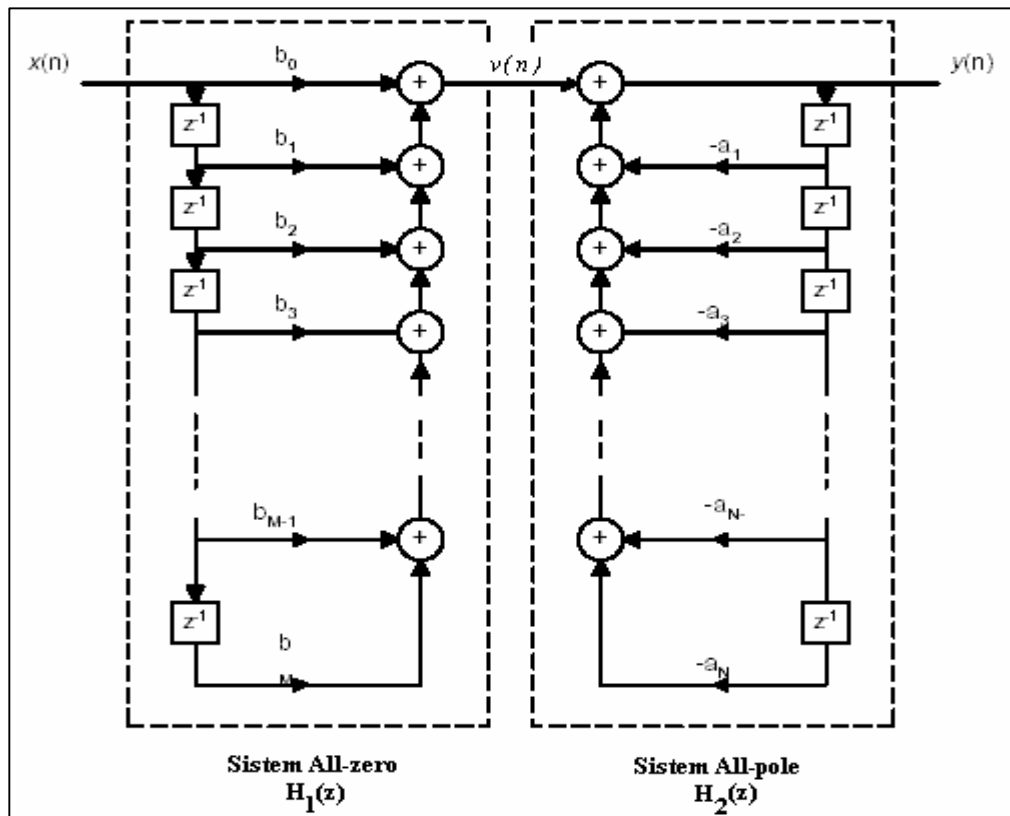
Fungsi karakteristik sistem IIR dapat dilihat sebagai dua sistem secara kaskade, yaitu:

$$H(z) = H_1(z) H_2(z)$$

dimana $H_1(z)$ terdiri atas zero dari $H(z)$ dan $H_2(z)$ terdiri atas pole dari $H(z)$,

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad \text{dan} \quad H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Persamaan di atas dapat diwujudkan dalam struktur IIR Direct Form I sebagai berikut:



Realisasi filter IIR ini memerlukan $M + N + 1$ perkalian, $M + N$ penjumlahan dan menggunakan delay (memori) terpisah pada cuplikan sinyal input dan outputnya. Lokasi memori yang dibutuhkan sebanyak $M + N + 1$ lokasi.

Struktur di atas dapat dinyatakan dalam persamaan perbedaan sebagai berikut :

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

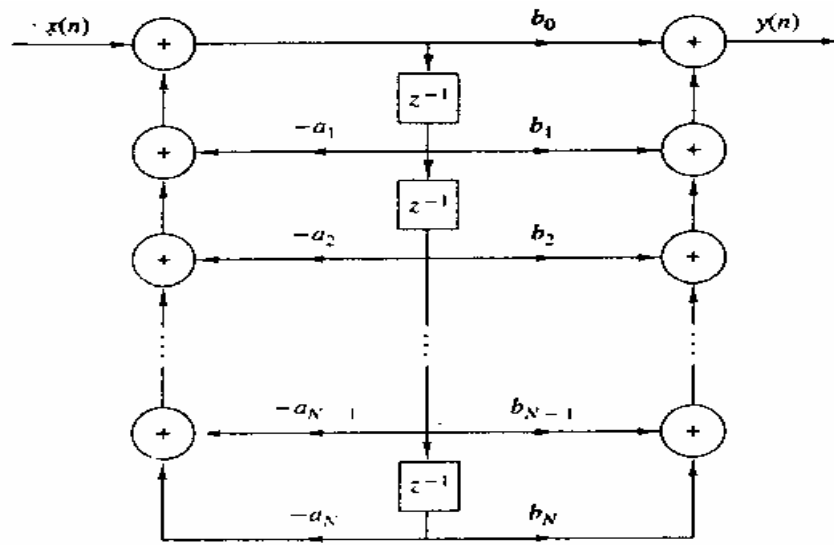
yang merupakan kaskade dari sistem non-rekursif :

$$v(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

dan sistem rekursif :

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + v(n)$$

Jika semua filter *all-pole* $H_2(z)$ diletakkan sebelum filter *all-zero* $H_1(z)$ diperoleh struktur yang lebih *compact* yang dinamakan struktur *Direct Form II* seperti pada gambar berikut :



Struktur di atas dapat dinyatakan dalam persamaan perbedaan sebagai berikut:

- untuk filter *all-pole*:

$$w(n) = -\sum_{k=1}^N a_k w(n-k) + x(n)$$

- untuk sistem *all-zero* dimana $w(n)$ sebagai inputnya:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k w(n-k)$$

Persamaan di atas hanya mengandung delay pada deretan $\{w(n)\}$ sehingga hanya sebuah jalur delay tunggal atau satu set lokasi memori tunggal yang diperlukan untuk menyimpan nilai $\{w(n)\}$ sebelumnya.

Jadi, struktur IIR *Direct Form 2* tersebut hanya membutuhkan $M + N + 1$ perkalian, $M+N$ penjumlahan dan nilai maksimum $\{M, N\}$ lokasi memori. Karena realisasi *direct form 2* meminimasi jumlah lokasi memori, maka struktur tersebut dikatakan bersifat *canonic*.

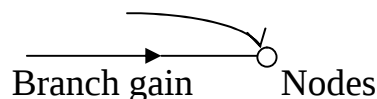
Kedua struktur di atas dikatakan *direct form* sebab diperoleh secara langsung dari fungsi sistem $H(z)$ tanpa penyusunan kembali $H(z)$ tersebut. Namun, keduanya sangat sensitif terhadap parameter kuantisasi dan oleh karenanya tidak direkomendasikan dalam aplikasi prakteknya.

1.2 Flow Graph

Tujuan Belajar 3

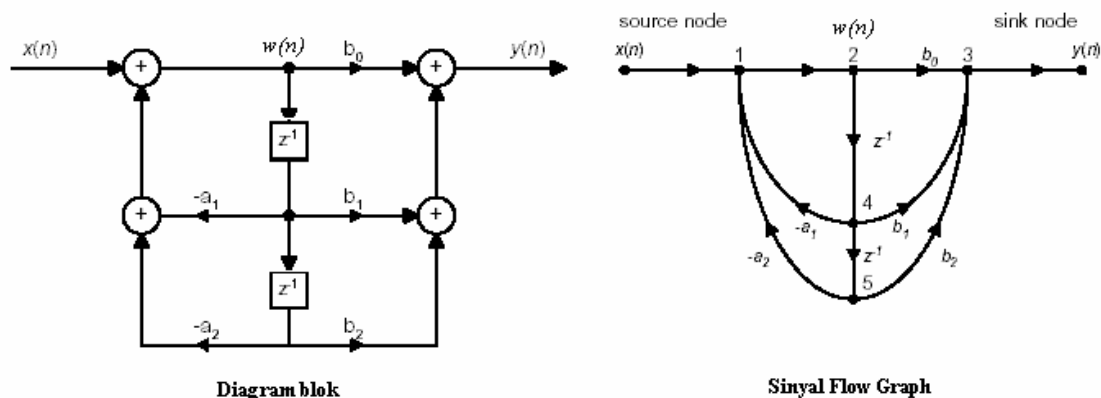
Peserta memahami peran Flow Graph dan graph theory dalam mengubah struktur filter.

Sinyal Flow Graph menyediakan alternatif representasi grafis dari struktur diagram blok yang digunakan untuk mengilustrasikan realisasi dari sistem. Elemen utama dari flow graph adalah *branch* dan *node*.



Sinyal flow graph merupakan set dari *branch* terarah yang terhubung di node. Secara definisi, sinyal keluar dari sebuah *branch* sama dengan gain *branch* (fungsi sistem) dikalikan sinyal yang masuk ke *branch*. Sedangkan sinyal pada suatu node sama dengan jumlah sinyal dari semua *branch* yang terhubung ke node tersebut.

Berikut ilustrasi dari filter IIR dua-pole dan dua-zero (orde dua) dalam bentuk diagram blok dan sinyal flow graphnya :



Sinyal flow graph di atas mempunyai lima node mulai dari 1 sampai 5. Dua dari node tersebut (1,3) merupakan node penjumlahan (yaitu berisi adder), sedangkan lainnya

merepresentasikan titik percabangan (*branching point*). *Branch transmittance* ditujukan untuk branch dalam flow graph.

Struktur filter direct form II di atas dapat dinyatakan dalam persamaan perbedaan sebagai berikut :

$$y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2)$$

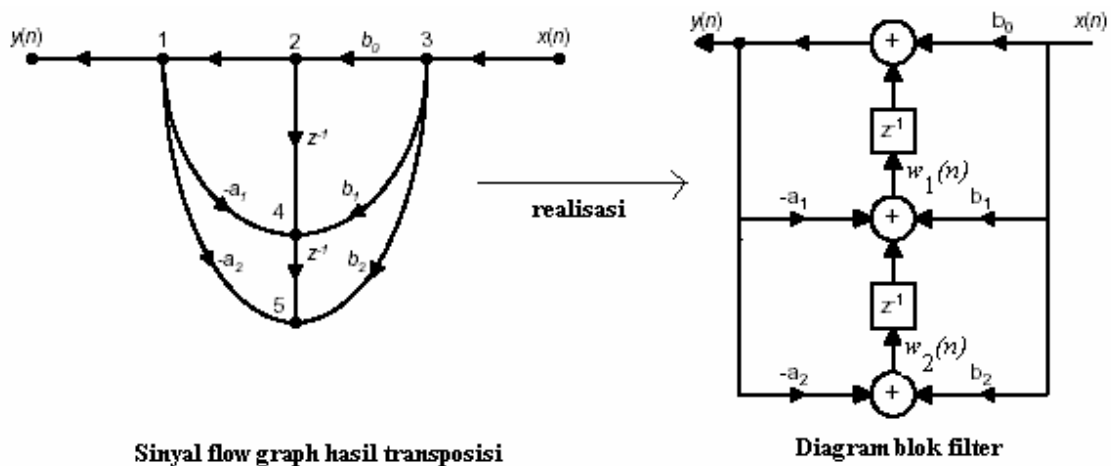
$$w(n) = -a_1 w(n-1) - a_2 w(n-2) + x(n)$$

Dengan flow graph sinyal linear, kita dapat mentransformasikan satu flow graph ke dalam flow graph lainnya tanpa mengubah hubungan input-output dasarnya untuk mendapatkan struktur sistem baru untuk sistem FIR dan IIR yaitu dengan *transposition* atau *flow-graph reversal theorem* yang menyatakan :

" If we reverse the directions of all branch transmittance and interchange the input and output in the flow graph, the system function remain unchanged"

Struktur yang dihasilkan disebut *transposed structure* atau *transposed form*.

Contoh transposisi dari sinyal flow graph di atas dan realisasinya dalam diagram blok adalah sebagai berikut :



Struktur realisasi hasil transposisi filter direct form II tersebut dapat dinyatakan dalam persamaan perbedaan sebagai berikut :

$$y(n) = w_1(n-1) + b_0 x(n)$$

$$w_1(n) = w_2(n-1) - a_1 y(n) + b_1 x(n)$$

$$w_2(n) = -a_2 y(n) + b_2 x(n)$$

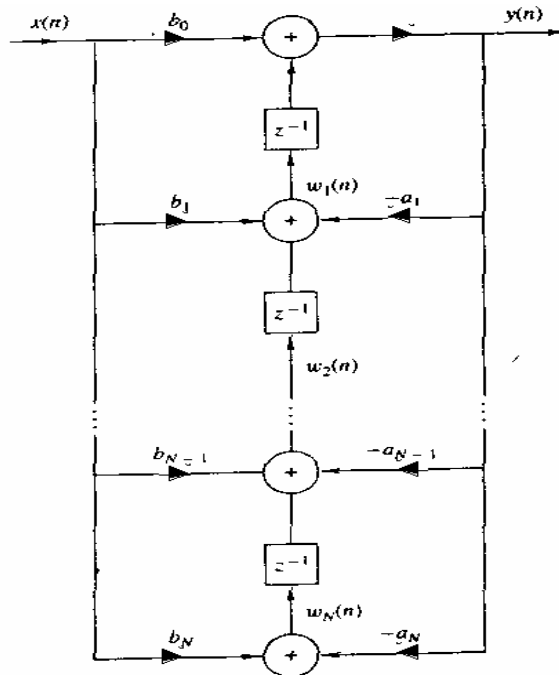
Secara umum, untuk hasil transposisi dari filter orde-N (asumsi $N=M$) IIR direct form II dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$y(n) = w_1(n-1) + b_0 x(n)$$

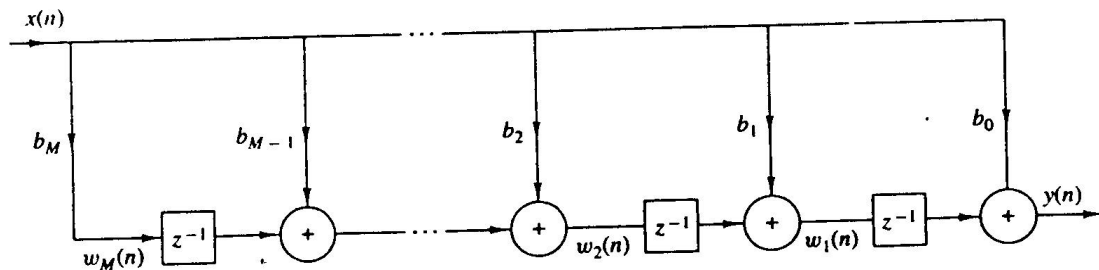
$$w_k(n) = w_{k+1}(n-1) - a_k y(n) + b_k x(n) \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$w_N(n) = -a_N y(n) + b_N x(n)$$

Persamaan di atas dapat diwujudkan dengan struktur filter sebagai berikut :



Untuk sistem FIR, struktur direct form hasil transposisi dapat diperoleh dengan mensetting nilai $a_k=0$ dengan $k=1, 2, \dots, N$. Struktur FIR hasil transposisi dapat digambarkan sebagai berikut :



Struktur di atas dapat dinyatakan dalam persamaan perbedaan sebagai berikut :

$$y(n) = w_1(n-1) + b_0 x(n)$$

$$w_k(n) = w_{k+1}(n-1) + b_k x(n) \quad k = 1, 2, \dots, M-1$$

$$w_M(n) = b_M x(n)$$

Secara keseluruhan, fungsi sistem IIR orde-2 (dua pole dan dua zero) untuk struktur direct form I, direct form II, maupun hasil transposisi direct form II mempunyai bentuk:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Dari ketiga struktur tersebut di atas, struktur direct form 2 lebih disukai dikarenakan jumlah lokasi memori yang diperlukan untuk implementasi lebih kecil.

1.3 Struktur Kaskade orde 2

Tujuan Belajar 4

Peserta memahami dan dapat menciptakan struktur kaskade orde 2.

Persamaan fungsi sistem IIR orde-tinggi :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Sistem tersebut dapat difaktorkan ke dalam kaskade sub sistem orde-2, sehingga $H(z)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z) \quad \text{dengan } K \text{ bagianinteger dari } \frac{N+1}{2}$$

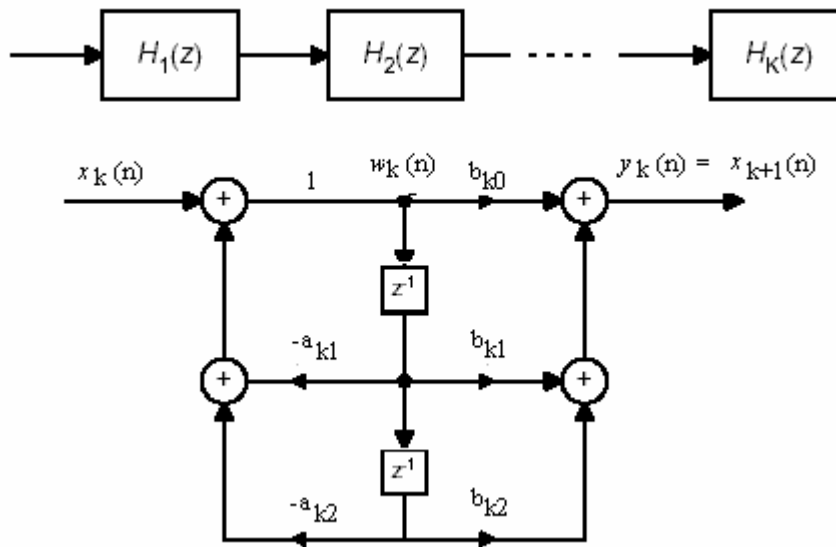
Fungsi sub-sistem orde-2 tersebut secara umum dinyatakan sebagai:

$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1} z^{-1} + b_{k2} z^{-2}}{1 + a_{k1} z^{-1} + a_{k2} z^{-2}}$$

Untuk sistem FIR, nilai parameter b_0 untuk K sub-sistem filter bernilai $b_0 = b_{10} b_{20} \dots b_{K0}$.

Jika $N = M$, beberapa sub-sistem orde-2 mempunyai koefisien pembilang yang bernilai nol, yaitu baik $b_{k2} = 0$ atau $b_{k1} = 0$ atau $b_{k2} = b_{k1} = 0$ untuk beberapa nilai k. Jika N ganjil dan $N = M$, maka salah satu dari sub-sistem, $H_k(z)$, harus mempunyai $a_{k2} = 0$, sehingga sub-sistem tersebut merupakan orde-1.

Bentuk umum dari struktur kaskade adalah sebagai berikut :



Jika kita menggunakan struktur direct form II untuk masing-masing subsistem, algoritma komputasi untuk merealisasikan sistem IIR dengan fungsi sistem $H(z)$ dapat dijelaskan dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$y_0(n) = x(n)$$

$$y_k(n) = x_{k+1}(n) \quad k = 1, 2, \dots, K-1$$

$$y(n) = y_K(n)$$

$$w_k(n) = -a_{k1}w_k(n-1) - a_{k2}w_k(n-2) + y_{k-1}(n) \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$y_k(n) = b_{k0}w_k(n) + b_{k1}w_k(n-1) + b_{k2}w_k(n-2) \quad k = 1, 2, \dots, K$$

Contoh :

Tentukan realisasi kaskade dari sistem fungsi :

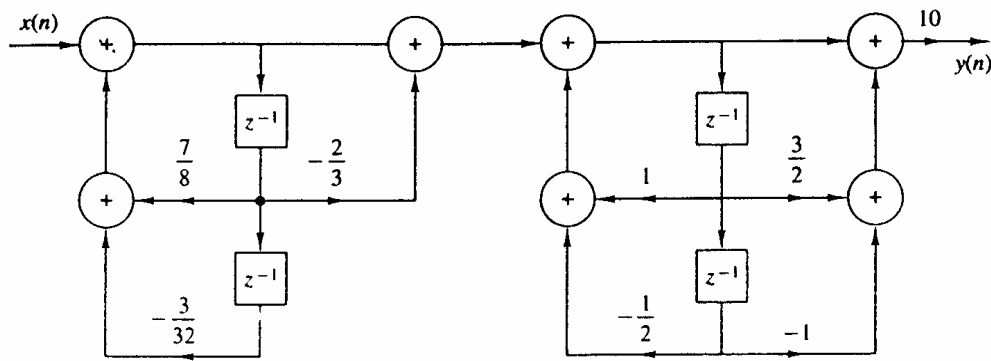
$$H(z) = \frac{10\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1 + 2z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{8}z^{-1}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right)}$$

Solusi :

Pasangan pole dan zero yang mungkin adalah :

$$H_1(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1 - \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{3}{32}z^{-2}} \quad \text{dan} \quad H_2(z) = \frac{1 + \frac{2}{3}z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

sehingga diagram blok realisasinya:



1.4 Struktur Paralel

Tujuan Belajar 5

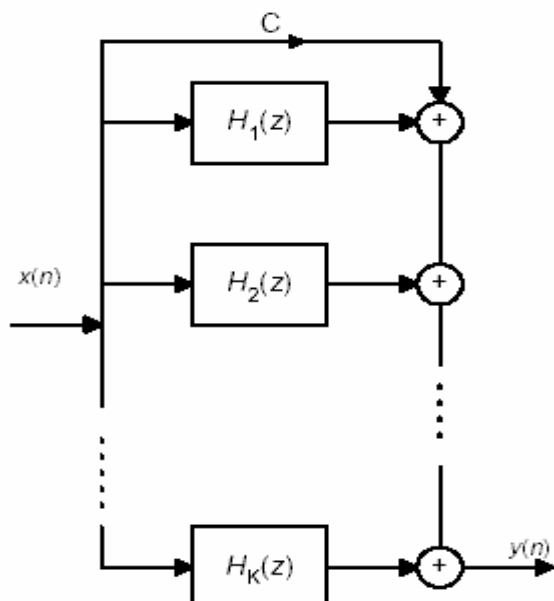
Peserta memahami dan dapat menciptakan struktur paralel.

Struktur paralel dari sistem IIR dapat diperoleh dengan ekspansi *partial-fraction* dari $H(z)$. Dengan asumsi bahwa $N = M$ dan pole-polenya berbeda, kita melakukan ekspansi *partial-fraction* $H(z)$ untuk memperoleh :

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

dimana $\{p_k\}$ adalah pole-pole, $\{A_k\}$ koefisien (residu) dalam ekspansi *partial-fraction* dan konstanta C didefinisikan $C = \frac{b_N}{a_N}$. Sistem $H(z)$ di atas diimplikasikan dalam

struktur yang terdiri atas bank paralel dari filter pole-tunggal. seperti pada diagram sebagai berikut :



Untuk menghindari perkalian oleh bilangan kompleks, kita dapat mengkombinasikan pasangan pole kompleks-konjugat untuk membentuk sub-sistem dua pole. Kita pun dapat mengkombinasikan pasangan pole bernilai real untuk membentuk sub-sistem dua-pole. Tiap sub-sistem ini mempunyai bentuk persamaan:

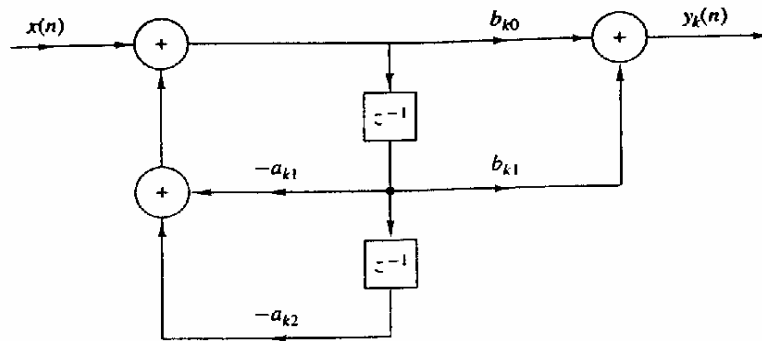
$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \quad \text{dengan } \{b_{ki}\} \text{ dan } \{a_{ki}\} \text{ bernilai real}$$

Keseluruhan sistemnya dapat diekspresikan sebagai berikut :

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^K H_k(z) \quad \text{dengan } K : \text{bagian integer dari } (N+1)/2$$

Jika N ganjil, satu dari $H_k(z)$ merupakan sistem pole tunggal ($b_{k1} = a_{k2} = 0$).

Implementasi $H(z)$ dapat diwujudkan dengan struktur direct form II sebagai berikut :



Persamaan realisasi bentuk paralel dari sistem FIR dengan struktur direct form II:

$$\begin{aligned} w_k(n) &= -a_{k1}w_k(n-1) - a_{k2}w_k(n-2) + x(n) & k = 1, 2, \dots, K \\ y_k(n) &= b_{k0}w_k(n) + b_{k1}w_k(n-1) & k = 1, 2, \dots, K \\ y(n) &= Cx(n) + \sum_{k=1}^K y_k(n) \end{aligned}$$

Contoh:

Tentukan realisasi paralel dari sistem fungsi :

$$H(z) = \frac{10\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1 + 2z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{8}z^{-1}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right)}$$

Solusi:

$H(z)$ harus dipecah secara parsial :

$$H(z) = \frac{A_1}{\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)} + \frac{A_2}{\left(1 - \frac{1}{8}z^{-1}\right)} + \frac{A_3}{\left(1 - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right)} + \frac{A_3^*}{\left(1 - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right)}$$

Nilai A_1 , A_2 , A_3 dan A_3^* yang akan ditentukan.

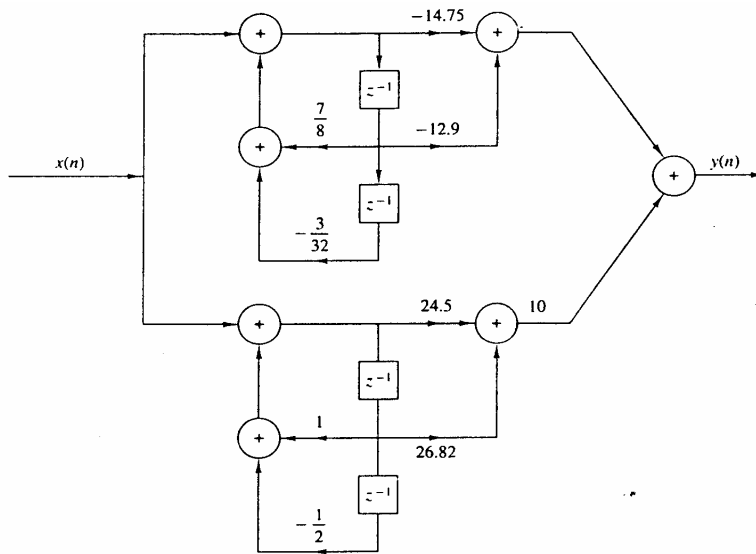
Dengan perhitungan diperoleh :

$$A_1 = 2,93 ; A_2 = -17,68 ; A_3 = 12,25 - j14,57 ; A_3^* = 12,25 + j14,57$$

Dengan mengkombinasikan kembali pasangan pole, diperoleh:

$$H(z) = \frac{-14,75 - 12,90z^{-1}}{1 - \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{3}{32}z^{-2}} + \frac{24,50 + 26,82z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Sehingga diagram blok realisasi pararelnya:



1.5 Struktur Frequency Sampling

Tujuan Belajar 6

Peserta mengerti struktur Frequency Sampling untuk implementasi filter

$H(\omega)$ didefinisikan pada :

$$w_k = \frac{2p}{M}(k + a) \quad k = 0, 1, \dots, M-1/2 \quad M \text{ odd}$$

$$k = 0, 1, \dots, (M/2)-1 \quad M \text{ even}$$

$$\alpha = 0 \text{ or } 1/2$$

ω_k merupakan titik sample.

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Spesifikasikan $H(\omega)$ pada ω_k :

$$H(k + a) = H\left(\frac{2p}{M}(k + a)\right) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j2p(k+a)n/m} \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

Jika $\alpha = 0$, persamaan menjadi DFT (*Discrete Fourier Transform*).

Persamaan di atas dapat diuraikan menjadi:

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k+a) e^{j2\pi(k+a)n/M} \quad n=0, \dots, M-1$$

Jika $\alpha = 0$, persamaan menjadi IDFT (*Inverse Discrete Fourier Transform*)

Kemudian dicari Z-transform dari $h(n)$:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{M-1} \left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k+a) e^{j2\pi(k+a)n/M} \right] z^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} H(k+a) \left[\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left(e^{j2\pi(k+a)n/M} z^{-1} \right)^n \right] \\ &= \frac{1-z^{-M} e^{j2\pi a}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k+a)}{1 - e^{j2\pi(k+a)/M} z^{-1}} \end{aligned}$$

Realisasi dengan memecah $H(z)$ menjadi

$$H(z) = H_1(z) H_2(z)$$

Untuk All zeros (Filter Comb).

$H_1(z)$ dan $H_2(z)$ ditentukan :

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{M} (1 - z^{-M} e^{j2\pi a}) \text{ menghasilkan } z_k = e^{j2\pi(k+a)/M}, k = 0, 1, \dots, M-1 \\ H_2(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k+a)}{1 - e^{j2\pi(k+a)/M} z^{-1}} \end{aligned}$$

Bank paralel dari filter single-pole menghasilkan frekuensi resonan.

$$p_k = e^{j2\pi(k+a)/M} \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

Terlihat, bahwa zero dan pole terjadi pada lokasi yang sama.

1.6 Struktur Lattice

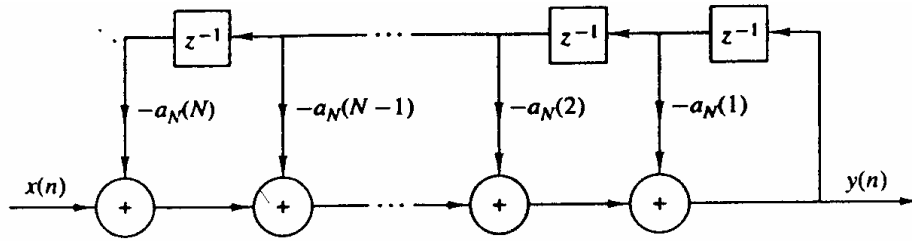
Tujuan Belajar 7

Peserta mengetahui ada struktur Lattice.

Fungsi sistem *all-pole*:

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_N(k) z^{-k}} = \frac{1}{A_N(z)}$$

Realisasi dengan struktur direct form:



Persamaan perbedaan sistem:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_N(k) y(n-k) + x(n)$$

Dengan mengubah aturan input dan output (mengubah $x(n)$ dengan $y(n)$) diperoleh:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^N a_N(k) x(n-k) + y(n)$$

Definisikan input: $x(n) = f_N(n)$

output: $y(n) = f_0(n)$

Kuantitas $\{f_m(n)\}$ dihitung secara mundur : $f_N(n), f_{N-1}(n), \dots$

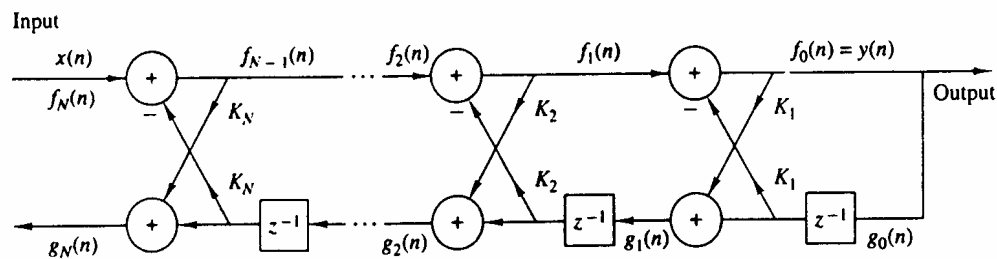
Persamaan filter lattice :

$$f_{m-1}(n) = f_m(n) - K_m g_{m-1}(n-1) \quad m = N, N-1, \dots, 1$$

$$g_m(n) = K_m f_{m-1}(n-1) + g_{m-1}(n-1) \quad m = N, N-1, \dots, 1$$

$$y(n) = f_0(n) = g_0(n)$$

Struktur dari persamaan di atas adalah:



Contoh: untuk $N=2 \rightarrow$ sistem 2-pole

Persamaan sistemnya :

$$f_2(n) = x(n), \quad f_1(n) = f_2(n) - K_2 g_1(n-1), \quad f_0(n) = f_1(n) - K_1 g_0(n-1)$$

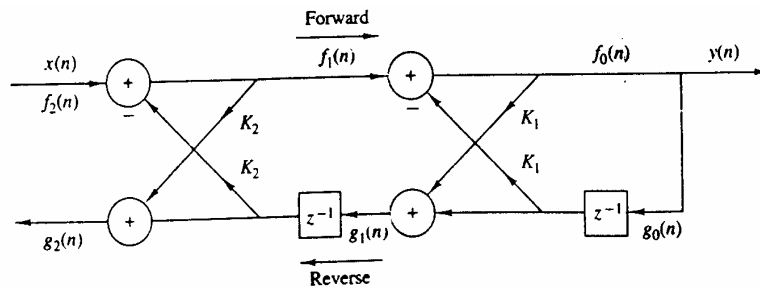
$$g_2(n) = K_2 f_1(n-1) + g_1(n-1), \quad g_1(n) = K_1 f_0(n-1) + g_0(n-1)$$

$$y(n) = f_0(n) = g_0(n)$$

$$y(n) = x(n) - K_1(1 + K_2)y(n-1) - K_2y(n-2) \rightarrow \text{IIR dua-pole}$$

$$g_2(n) = K_2y(n) + K_1(1 + K_2)y(n-1) + y(n-2) \rightarrow \text{FIR dua-zero}$$

Strukturnya adalah sebagai berikut:



Fungsi sistem IIR all-pole adalah:

$$H_a(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{F_0(z)}{F_m(z)} = \frac{1}{A_m(z)}$$

Fungsi sistem FIR all-zero adalah:

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = \frac{G_m(z)}{G_0(z)} = B_m(z)$$

2 Masalah Desain Filter

2.1 *Konsiderasi Umum*

Tujuan Belajar 8

Peserta mengetahui konsiderasi umum dari desain filter, seperti pertentangan antara kausalitas dan reliabilitas, dan teorema Paley-Wiener

Filter non-kausal $\rightarrow$ filter tidak dapat direalisasikan

Contoh:

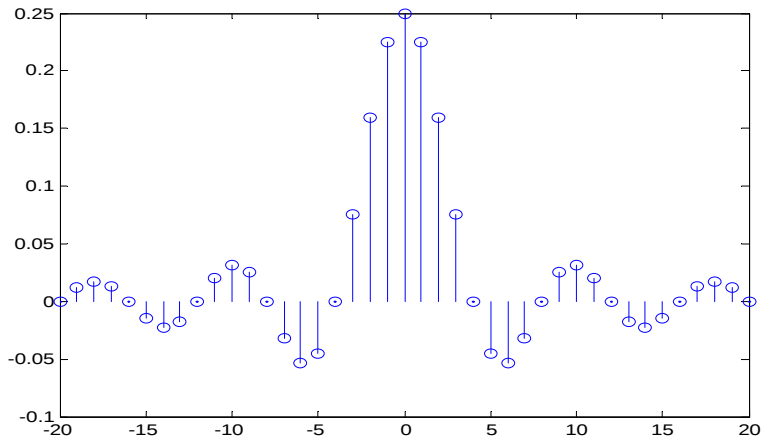
Filter low pass ideal dengan karakteristik respons frekuensi:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$$

Respons impuls dari filter ini adalah:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{w_c}{p} & n = 0 \\ \frac{w_c}{p} \frac{\sin w_c n}{w_c n} & n \neq 0 \end{cases}$$

Plot dari $h(n)$ untuk $\omega_c = \pi/4$:



```
>> n=-20:20; w=pi/4;
>> y=w/pi*sinc(w/pi*n);
>> stem(n,y)
```

LPF ideal tersebut non-kausal sehingga tidak dapat direalisasikan dalam praktek

Solusi yang mungkin :

- delay n_o pada $h(n)$
- mengeset $h(n) = 0$ untuk $n < n_o$. Deret Fourier $H(w)$ menimbulkan fenomena Gibbs, yaitu osilasi pada band edge dari respons filter.

Sistem yang dihasilkan tidak mempunyai karakteristik respons frekuensi ideal lagi.

Teorema Paley-Wiener memberikan solusi tentang kondisi perlu dan cukup dari respon frekuensi $H(w)$ agar filter yang dihasilkan kausal.

Teorema Paley-Wiener:

Jika $h(n)$ mempunyai energi terbatas dan $h(n) = 0$ untuk $n < 0$

Maka,
$$\int_{-p}^p |\ln |H(w)|| dw < \infty$$

Jika $|H(w)|$ square integrable dan jika integral di atas terbatas,

Maka, respon fasa $\Theta(\omega)$ dapat diasosiasikan dengan $|H(w)|$, sehingga filter yang dihasilkan dengan respon frekuensi $H(w) = |H(w)|e^{j\Theta(w)}$ akan kausal.

Catatan :

$|H(w)|$ tidak boleh bernilai nol pada suatu band frekuensi tertentu supaya $\int \ln|H(w)| < \infty$
Semua filter ideal adalah non-kausal

Kausalitas menunjukkan hubungan antara komponen real $H_R(\omega)$ dan komponen imajiner $H_I(\omega)$ dari respons $H(\omega)$. Hubungan ini ditunjukkan dalam persamaan berikut:

$$h(n) = h_e(n) + h_o(n)$$

dimana

$$h_e(n) = 1/2 [h(n) + h(-n)] \quad \text{dan} \quad h_o(n) = 1/2 [h(n) - h(-n)]$$

bila $h(n)$ causal, maka $h(n)$ bisa diperoleh kembali dari $h_e(n)$ untuk $0 \leq n \leq \infty$ atau $h_o(n)$ untuk $1 \leq n \leq \infty$

dapat dilihat bahwa:

$$h(n) = 2h_e(n)u(n) - h_e(0)\delta(n) \quad n \geq 0 \quad \text{dan}$$

$$h(n) = 2h_o(n)u(n) + h(0)\delta(n) \quad n \geq 1$$

Catatan :

Jika $h_o(n) = 0$ untuk $n = 0 \rightarrow h(0)$ tidak dapat diperoleh dari $h_o(n)$ dan harus diperoleh secara eksplisit. Untuk $n \geq 1$, $h_o(n) = h_e(n) \rightarrow$ erat hubungan antar keduanya.

Jika $h(n)$ absolutely summable (yaitu BIBO stabil) $\rightarrow H(\omega)$ exist, dan

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$$

Dan jika $h(n)$ bernilai real dan kausal, maka

$$h_e(n) \xleftrightarrow{F} H_R(w) \quad \text{dan} \quad h_o(n) \xleftrightarrow{F} H_I(w)$$

atau : - $H_R(\omega)$ dan $H_I(\omega)$ saling bergantung

- $|H(\omega)|$ dan $\theta(\omega)$ saling bergantung

Prosedur menentukan $H(\omega)$:

- mencari $h_e(n)$ dari $H_R(\omega)$ atau
- menentukan $H_I(\omega)$ dan $h(0)$

Contoh mencari $H(\omega)$ dari $H_R(\omega)$ berikut:

$$H_R(\omega) = \frac{1 - a \cos \omega}{1 - 2a \cos \omega + a^2}, |a| < 1$$

Solusi :

Cari $h_e(n)$:

$$H_R(z) = H_R(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \Rightarrow H_R(z) = \frac{1 + (z + z^{-1})^2}{1 - a(z + z^{-1}) + a^2} = \frac{z - a(z^2 + 1)/2}{(z - a)(1 - az)}$$

ROC ada di antara $p_1 = a$ dan $p_2 = 1/a$, dan termasuk unit circle, sehingga $|a| < |z| < \frac{1}{|a|}$

dan $h_e(n)$ merupakan two-sided sequence, dengan pole $z = a$ untuk kausal dan $p_2 = 1/a$ untuk antikausal.

$$\text{diperoleh : } h_e(n) = \frac{1}{2} a^{|n|} + \frac{1}{2} d(n)$$

$$h(n) \text{ diperoleh dari nilai } h_e(n) : \quad h(n) = a^n u(n)$$

$$\text{Transformasi Fourier dari } h(n): \quad H(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Hubungan antara $H_R(\omega)$ dan $H_I(\omega)$ dari FT $h(n)$ yang absolutely summable, kausal dan real dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega) = \frac{1}{p} \int_{-p}^p H_R(l) U(\omega - l) dl$$

dengan $U(\omega)$ merupakan respons frekuensi dari unit step $u(n)$

$$\begin{aligned} U(\omega) &= p d(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= p d(\omega) + \frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \cot \frac{\omega}{2}, \quad -p \leq \omega \leq p \end{aligned}$$

$$\text{diperoleh hubungan : } H_I(\omega) = -\frac{1}{2p} \int_{-p}^p H_R(l) \cot \frac{\omega - l}{2} dl \text{ Hubungan di atas disebut}$$

discrete Hilbert Transform.

Latihan : cari bentuk transformasi *Hilbert* dari hubungan $H_R(\omega)$ dengan $H_I(\omega)$

Kesimpulan implikasi kausalitas :

1. $H(\omega)$ tidak boleh 0 kecuali pada point frekuensi terbatas

2. $|H(\omega)|$ tidak bisa konstan pada sebuah interval, dan tidak bisa bertransisi yang tajam dari passband ke stopband (konsekuensi fenomena Gibbs agar $h(n)$ kausal)
3. $H_I(\omega)$ dan $H_R(\omega)$ terhubung oleh discrete Hilbert Transform, $|H(\omega)|$ dan $\Theta(\omega)$ tidak bisa dipilih secara acak

Persamaan sistem dibatasi menjadi :

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) , \text{ yang causal dan realizable}$$

dengan $H(\omega)$:
$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}}$$

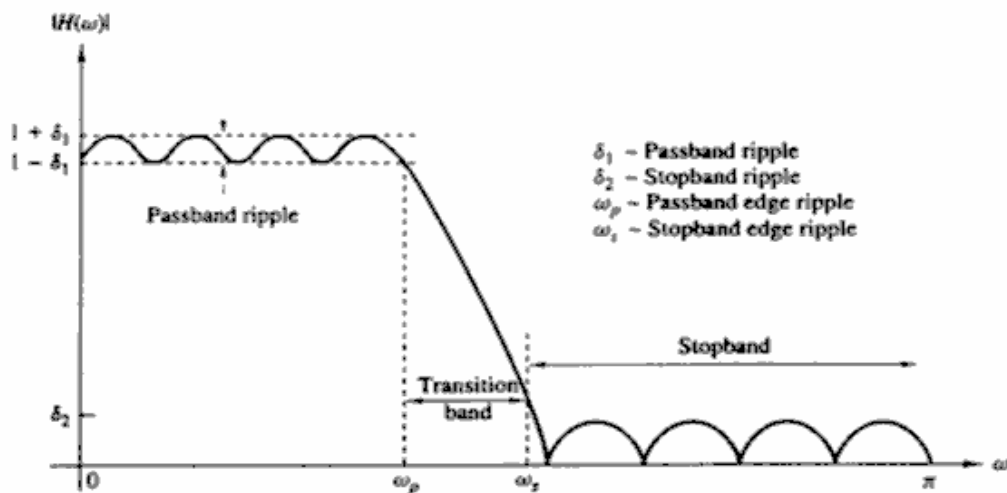
2.2 Problem Desain

Tujuan Belajar 9

Peserta dapat membuat problem desain: spesifikasi untuk filter LCCDE.

Problem desain filter digital : mencari $\{a_k\}$ dan $\{b_k\}$ agar $H(\omega)$ mendekati ideal

Berikut adalah karakteristik magnitude dari realizable filter :



Dalam problem desain filter kita dapat menspesifikasikan :

- ripple passband, $20\log_{10}\delta_1$, maksimum yang dapat ditoleransi
- ripple stopband, $20\log_{10}\delta_2$, maksimum yang dapat ditoleransi
- frekuensi sisi (*edge*) passband ω_p
- frekuensi sisi (*edge*) stopband ω_s

Parameter $\{a_k\}$ dan $\{b_k\}$ ditentukan berdasarkan spesifikasi di atas.

Orde filter berdasarkan kriteria untuk memilih parameter $\{a_k\}$ dan $\{b_k\}$ dan koefisien (M,N) .

3 Desain FIR

Tujuan Belajar 10

Peserta mengerti prinsip desain FIR *symetric* dan *asymetric*.

Persamaan keluaran filter FIR dengan panjang M :

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_{M-1}x(n-M+1)$$
$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) \text{ dengan } \{b_k\} \text{ merupakan koefisien filter}$$

Dalam bentuk konvolusi

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \text{ sehingga } b_k = h(k), k = 0, \dots, M-1$$

Fungsi sistem filter : $H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)z^{-k} \rightarrow$ polinomial dari z^{-1} orde $M-1$

Syarat **filter FIR fasa-linear** :

$$h(n) = \pm h(M-1-n) \quad n = 0, \dots, M-1$$

Jika kondisi simetri dan antisimetri pada $h(n)$:

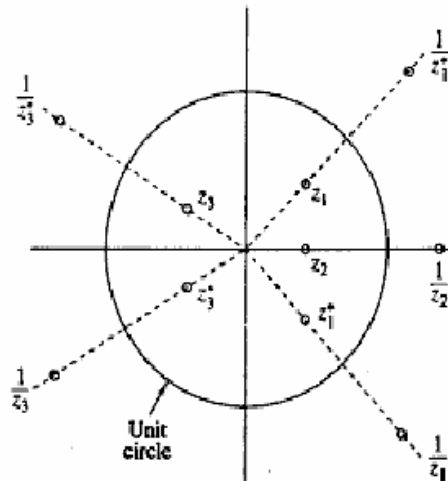
$$\begin{aligned} H(z) &= h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \dots + h(M-2)z^{-(M-2)} + h(M-1)z^{-(M-1)} \\ &= z^{-(M-1)/2} \left\{ h\left(\frac{M-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \left[z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2} \right] \right\} \rightarrow M \text{ ganjil} \\ &= z^{-(M-1)/2} \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \left[z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2} \right] \rightarrow M \text{ genap} \end{aligned}$$

Ternyata, $z^{-(M-1)} H(z^{-1}) = \pm H(z)$

Sehingga, akar $H(z) =$ akar $H(z^{-1}) \rightarrow H(z)$ harus mempunyai pasangan akar resiprokal.

- Jika z_1 real $\rightarrow$ akar-akar $H(z)$: z_1 dan $1/z_1$
- Jika $h(n)$ real dan z_1 kompleks $\rightarrow$ akar-akar $H(z)$: z_1 , $1/z_1$, z_1^* dan $1/z_1^*$

Berikut kesimetrian lokasi zero / akar dari filter FIR fasa-linear :



Jika $h(n) = h(M-1-n)$, maka $H(w) = H_r(w)e^{-jw(M-1)/2}$

dimana , $H_r(w) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \cos w\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$,M ganjil

$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) \cos w\left(\frac{M-1}{2} - n\right) \quad ,M \text{ genap}$$

Karakteristik fasa filter :

$$q(w) = \begin{cases} -w\left(\frac{M-1}{2}\right) & H_r(w) > 0 \\ -w\left(\frac{M-1}{2}\right) + p & H_r(w) < 0 \end{cases}$$

Jika $h(n) = -h(M-1-n) \rightarrow$ respons sistem **antisimetrik**.

Untuk M ganjil, centre point $h(n)$ adalah $n = (M-1)/2 \rightarrow h((M-1)/2) = 0$

Respons sistem antisimetrik: $H(w) = H_r(w)e^{j\left[-\frac{w(M-1)}{2} + \frac{p}{2}\right]}$

dimana : $H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \sin w\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$, M ganjil

$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) \sin w\left(\frac{M-1}{2} - n\right) \quad , M \text{ genap}$$

Respons fasanya :

$$q(w) = \begin{cases} \frac{p}{2} - w\left(\frac{M-1}{2}\right) & H_r(w) > 0 \\ \frac{3p}{2} - w\left(\frac{M-1}{2}\right) & H_r(w) < 0 \end{cases}$$

Catatan :

- Untuk $h(n)$ simetrik, jumlah koefisien filter adalah $(M+1)/2$ untuk M ganjil dan $M/2$ untuk M genap
- Untuk $h(n)$ antisimetrik, $h((M-1)/2) = 0$, mempunyai jumlah koefisien filter $(M-1)/2$ untuk M ganjil dan $M/2$ untuk M genap

Contoh pemilihan desain filter simetrik / antisimetrik tergantung aplikasinya :

- Jika $h(n) = -h(M-1-n)$ dan M ganjil $\rightarrow H_r(0) = 0$ dan $H_r(p) = 0$. Sistem tersebut tidak cocok untuk LPF atau HPF
- Untuk sistem dengan respon antisimetrik dan M genap $\rightarrow H_r(0) = 0$, sehingga tidak cocok untuk desain LPF
- Jika $h(n) = h(M-1-n) \rightarrow$ filter mempunyai respons tidak-nol pada $\omega = 0$, LPF

Problem desain filter FIR : menentukan koefisien M untuk $h(n)$ dari spesifikasi $H_d(w)$ filter, respons frekuensi yang diinginkan.

3.1 Teknik Windows

Tujuan Belajar 11

Peserta dapat mendesain FIR dengan teknik windows. Termasuk di dalamnya, peserta mengenal window rectangular, Barlett, Hanning, Hamming, dan Blackman. Peserta mengetahui bahwa window Hanning ekuivalen dengan pembobotan di domain frekuensi.

Menentukan $h_d(n)$ dari $H_d(w)$, respons filter yang diinginkan :

$$H_d(w) = \sum_{n=0}^{\infty} h_d(n) e^{-jwn} \quad \xleftrightarrow{F} \quad h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p H_d(w) e^{jwn} dw$$

Potong $h_d(n)$ pada $n = M-1$ untuk menghasilkan filter FIR dengan panjang M , yang ekuivalen mengalikan $h_d(n)$ dengan window rectangular :

$$w(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, \dots, M-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Respons sistemnya : $h(n) = h_d(n) w(n)$

$$= \begin{cases} h_d(n) & n = 0, \dots, M-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Respons frekuensi dari filter FIR:

$$W(w) = \sum_{n=0}^{M-1} w(n)e^{-jwn} \quad \text{dan} \quad H(w) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p H_d(v)W(w-v)dv = H_d(w) * W(w)$$

Untuk window rectangular :

$$W(w) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-jwn} = \frac{1-e^{-jwM}}{1-e^{-jw}} = e^{-jw(M-1)/2} \frac{\sin\left(\frac{wM}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}$$

$$|W(w)| = \frac{\left|\sin\left(\frac{wM}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right|} \quad \text{dan} \quad q(w) = \begin{cases} -w\left(\frac{M-1}{2}\right) & , \sin\left(\frac{wM}{2}\right) \geq 0 \\ -w\left(\frac{M-1}{2}\right) + p & , \sin\left(\frac{wM}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Untuk window Bartlett (triangular):

$$w(n) = 1 - \frac{\left|2n - \frac{M-1}{2}\right|}{M-1} \quad \text{untuk} \quad 0 \leq n \leq M-1$$

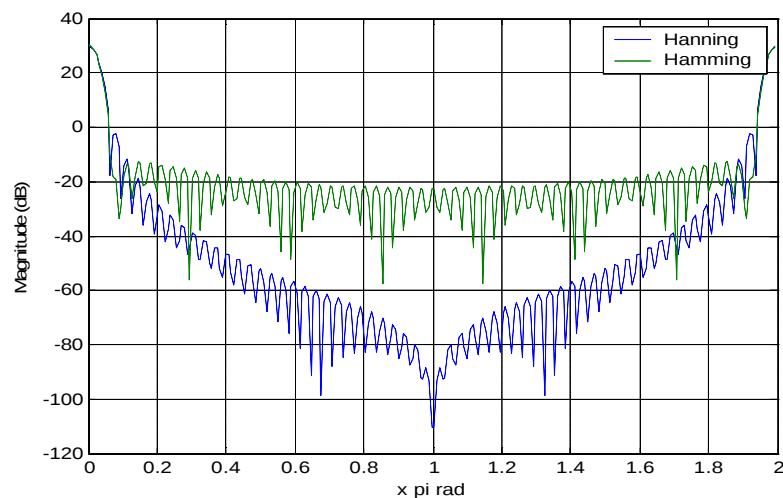
Untuk window Hanning:

$$w(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2pn}{M-1} \right) \quad \text{untuk} \quad 0 \leq n \leq M-1$$

Untuk window Hamming:

$$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos \frac{2pn}{M-1} \quad \text{untuk} \quad 0 \leq n \leq M-1$$

Grafik respons frekuensi window Hanning dan Hamming:



```
>> b1=hanning(61); b2=hamming(61);
>> [H1,f]=freqz(b1,1,251,'whole',2);
>> H2=freqz(b2,1,251,'whole',2);
>> H=[H1 H2];
>> s.yunits='dB'; s.xunits=' x pi rad';
>> freqzplot(H,f,s)
```

Untuk window Blackman:

$$w(n) = 0,42 - 0,5 \cos \frac{2pn}{M-1} + 0,08 \cos \frac{4pn}{M-1} \quad \text{untuk } 0 \leq n \leq M-1$$

Contoh : desain filter FIR LP simetrik yang mempunyai respons frekuensi

$$H_d(w) = \begin{cases} 1e^{-jw(M-1)/2} & 0 \leq |w| \leq w_c \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Respons unitnya :

$$h_d(n) = \frac{1}{2p} \int_{-w_c}^{w_c} e^{jw\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} dw = \frac{\sin w_c \left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{p \left(n - \frac{M-1}{2}\right)} \quad n \neq (M-1)/2$$

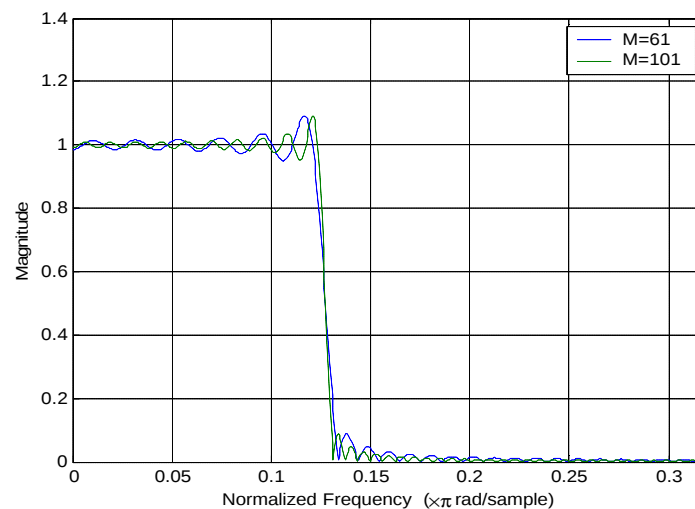
Jelas, bahwa $h_d(n)$ non-kausal dan infinite.

Jika menggunakan window rectangular diperoleh:

$$h(n) = \frac{\sin w_c \left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{p \left(n - \frac{M-1}{2}\right)} \quad 0 \leq n \leq M-1, n \neq (M-1)/2$$

Jika M dipilih ganjil, maka nilai $h(n)$ pada $n = (M-1)/2$ adalah $h\left(\frac{M-1}{2}\right) = \frac{w_c}{p}$

Respons frekuensi dari filter tersebut dengan $\omega_c = 0,4\pi$ untuk $M=61$ dan $M=101$ digambarkan:



```
>> b1=0.4*sinc(0.4*(0:60)-0.4*30); % M =61
>> b2=0.4*sinc(0.4*(0:100)-0.4*50); % M=101
>> [H1,w]=freqz(b1,1,512,2); [H2,w]=freqz(b2,1,512,2);
>> H=[H1 H2];
>> s.xunits ='rad/sample'; s.yunits ='linear'; s.plot ='mag';
>> freqzplot(H,w,s)
```

Karakteristik domain-frekuensi untuk beberapa fungsi window :

Window	Main Lobe	Peak Sidelobe
Rectangular	$4\pi/M$	-13 dB
Bartlett	$8\pi/M$	-27 dB
Hanning	$8\pi/M$	-32 dB
Hamming	$8\pi/M$	-43 dB
Blackman	$12\pi/M$	-58 dB

3.2 Teknik Frequency Sampling

Tujuan Belajar 12

Peserta dapat mendesain FIR dengan teknik *Frequency Sampling*.

$H_d(\omega)$ didefinisikan pada

$$w_k = \frac{2p}{M}(k + \alpha) \quad k = 0, 1, \dots, (M-1)/2, M \text{ ganjil}$$

$$k = 0, 1, \dots, (M/2)-1, M \text{ genap}$$

$$\alpha = 0 \text{ atau } 1/2$$

kemudian cari $h(n)$ dengan inversi. Untuk mengurangi sidelobe, diharapkan untuk mengoptimasi spesifikasi pada transisi band dari filter.

Contoh:

Respons frekuensi dari filter FIR yang diinginkan :

$$H_D(w) = H(w) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-jwn}$$

Spesifikasikan $H(w)$ pada ω_k :

$$\begin{aligned} H(k + \alpha) &\equiv H\left(\frac{2p}{M}(k + \alpha)\right) \\ &\equiv \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-2p(k+\alpha)n/M} \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

Jika $\alpha = 0$, persamaan menjadi DFT (*Discrete Fourier Transform*)

Dari persamaan di atas menjadi:

$$\sum_{k=0}^{M-1} H(k+a) e^{j2\pi k \frac{m}{M}} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} h(n) e^{-j2\pi a \frac{n}{M} m} \equiv M h(n) e^{-j2\pi a \frac{m}{M}}$$

Menghasilkan nilai $h(n)$:

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k+a) e^{j2\pi (k+a) \frac{n}{M}}$$

Jika $\alpha = 0$, persamaan menjadi IDFT (*Inverse Discrete Fourier Transform*)

Persamaan di atas memungkinkan untuk menghitung nilai dari respon $h(n)$ dari spesifikasi sample frekuensi $H(k+a)$, $k=0,1, \dots, M-1$.

Catatan :

Jika $\{h(n)\}$ real $\rightarrow H(k+\alpha) = H^*(M-k-\alpha)$ (kondisi simetri)

dapat digunakan untuk mengurangi spesifikasi frekuensi dari M titik menjadi $(M+1)/2$ titik untuk M ganjil dan $M/2$ titik M genap. Jadi, persamaan linear untuk menentukan $\{h(n)\}$ dari $\{h(k+\alpha)\}$ dapat disederhanakan.

Contoh filter dengan respons asimetrik

$$H(\omega) = H_r(\omega) e^{j[-\omega(M-1)/2 + \beta]}$$

Jika disample pada frekuensi $\omega_k = 2\pi(k+a)/M$, $k=0,1,\dots,M-1$ didapat:

$$H(k+a) = H_r \left(\frac{2\pi}{M} (k+a) \right) e^{j \left[\beta - \frac{2\pi}{M} (k+a) \frac{M-1}{2} \right]}$$

di mana $\beta = 0$ bila $\{h(n)\}$ symmetric

$\beta = 1$ bila $\{h(n)\}$ antisymmetric

Dapat disederhanakan dengan mendefinisikan set sample frekuensi real $\{G(k+m)\}$:

$$G(k+a) = (-1)^k H_r \left(\frac{2\pi}{M} (k+a) \right)$$

Eliminasi $H_r(\omega_k)$: $H(k+a) = G(k+a) e^{j\pi k} e^{j \left[\beta - \frac{2\pi}{M} (k+a) \frac{M-1}{2} \right]}$

Sekarang, kondisi simetri untuk $H(k+\alpha)$ ditranslasikan ke dalam kondisi simetri $G(k+\alpha)$ untuk menyederhanakan $\{h(n)\}$ untuk empat kasus $\beta = 0, 1$ dan $\alpha = 0, 1/2$ seperti pada tabel berikut :

	Symmetric
$\alpha = 0$	$H(k) = G(k)e^{j\pi k/M} \quad k = 0, 1, \dots, M-1$ $G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) \quad G(k) = -G(M-k)$ $h(n) = \frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^U G(k) \cos \frac{2\pi k}{M} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}$ $U = \begin{cases} \frac{M-1}{2}, & M \text{ odd} \\ \frac{M}{2} - 1, & M \text{ even} \end{cases}$ $H\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{-j\pi/2} e^{j\pi(2k+1)/2M}$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$G\left(k + \frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]$ $G\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(M - k - \frac{1}{2}\right)$ $h(n) = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^U G\left(k + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)$
	Antisymmetric
$\alpha = 0$	$H(k) = G(k)e^{j\pi/2} e^{j\pi k/M} \quad k = 0, 1, \dots, M-1$ $G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) \quad G(k) = G(M-k)$ $h(n) = -\frac{2}{M} \sum_{k=1}^{(M-1)/2} G(k) \sin \frac{2\pi k}{M} \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad M \text{ odd}$ $h(n) = \frac{1}{M} \left\{ (-1)^{n+1} G(M/2) - 2 \sum_{k=1}^{(M/2)-1} G(k) \sin \frac{2\pi}{M} k \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\} \quad M \text{ even}$ $H\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{j\pi(2k+1)/2M}$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$G\left(k + \frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]$ $G\left(k + \frac{1}{2}\right) = -G\left(M - k - \frac{1}{2}\right); G(M/2) = 0 \text{ for } M \text{ odd}$ $h(n) = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^V G\left(k + \frac{1}{2}\right) \cos \frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)$ $V = \begin{cases} \frac{M-3}{2}, & M \text{ odd} \\ \frac{M}{2} - 1, & M \text{ even} \end{cases}$

Contoh :

Cari koefisien FIR fasa linear dengan $M = 15$ dengan respon impuls simetrik dan respons frekuensi memenuhi :

$$H_r\left(\frac{2pk}{15}\right) = \begin{cases} 1 & k = 0,1,2,3 \\ 0.4 & k = 4 \\ 0 & k = 5,6,7 \end{cases}$$

Solusi :

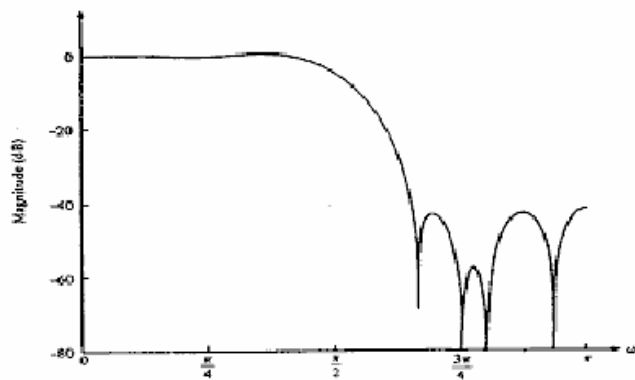
Untuk $h(n)$ simetrik dan $\alpha = 0$

dari tabel : $G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2pk}{15}\right) \quad k = 0, 1, \dots, 7$

Dari hasil perhitungan $h(n)$ didapat:

$$\begin{aligned} h(0) &= h(14) = -0.014112893 \\ h(1) &= h(13) = -0.001945309 \\ h(2) &= h(12) = 0.040000004 \\ h(3) &= h(11) = 0.01223454 \\ h(4) &= h(10) = -0.09138802 \\ h(5) &= h(9) = -0.01808986 \\ h(6) &= h(8) = 0.3133176 \\ h(7) &= 0.52 \end{aligned}$$

Dari $\{h(n)\}$ maka didapat respons $H(\omega)$ dengan grafik:



3.3 Teknik *Optimal Equiripple*

Tujuan Belajar 13

Peserta dapat mendesain FIR dengan teknik *Optimal Equiripple*.

Teknik window dan frequency sampling mudah dimengerti tetapi punya beberapa kelemahan :

- ω_p dan ω_s tidak dapat ditentukan pradesign
- δ_1 dan δ_2 kurang bisa ditentukan secara simultan

- Error Aproksimasi tidak terdistribusi dengan baik pada interval-interval band (besar di dekat daerah transisi)

Metoda alternatif dengan minimisasi dari maximum aproksimasi error (minimax) → Chebyshev error

3.3.1 Overview

1. Define a minimax problem
2. Discuss the number of maxima & minima (= extrema)
3. Design algorithm, polynomial interpolation
4. Parks-McClellan algorithm
5. Remez exchange routine, as a part of P-McCalg

Development of the Minimax Problem

Diketahui :

$$H(e^{jw}) = e^{jb} e^{-j\frac{M-1}{2}w} H_r(w)$$

↓ "Amplitudo Response" bilangan real

Beberapa kasus dalam desain filter FIR :

Type	Kondisi	β	$H_r(e^{j\omega})$
I	M ganjil, $h(n)$ simetrik	0	$\sum_{n=0}^{(M-1)/2} a(n) \cos wn$
II	M genap, $h(n)$ simetrik	0	$\sum_{n=1}^{M/2} b(n) \cos[w(n-1/2)]$
III	M ganjil, $h(n)$ antisimetrik	$\pi/2$	$\sum_{n=0}^{(M-1)/2} c(n) \sin wn$
IV	M genap, $h(n)$ antisimetrik	$\pi/2$	$\sum_{n=1}^{M/2} d(n) \sin[w(n-1/2)]$

dengan nilai $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ dan $d(n)$ ditentukan sebagai berikut:

$$a(k) = \begin{cases} h\left(\frac{M-1}{2}\right) & k = 0 \\ 2h\left(\frac{M-1}{2} - k\right) & k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2} \end{cases}$$
$$b(n) = d(n) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right), k = 1, 2, \dots, M/2$$

$$c(n) = 2h\left(\frac{M-1}{2} - k\right), k = 1, 2, \dots, (M-1)/2$$

Persamaan $H_r(\omega)$ bisa dinyatakan dalam $H_r(\omega) = Q(\omega) P(\omega)$

di mana : $P(\omega) = \sum_{n=0}^L a(n) \cos \omega n$

Type	$Q(\omega)$	L	$P(\omega)$
I	1	$\frac{M-1}{2}$	$\sum_{n=0}^L a(n) \cos \omega n$
II	$\cos(\omega/2)$	$\frac{M}{2} - 1$	$\sum_{n=0}^L \tilde{b}(n) \cos \omega n$
II	$\sin \omega$	$\frac{M-3}{2}$	$\sum_{n=0}^L \tilde{c}(n) \cos \omega n$
IV	$\sin(\omega/2)$	$\frac{M}{2} - 1$	$\sum_{n=0}^L \tilde{d}(n) \cos \omega n$

Identitas trigonometri : $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ dst.

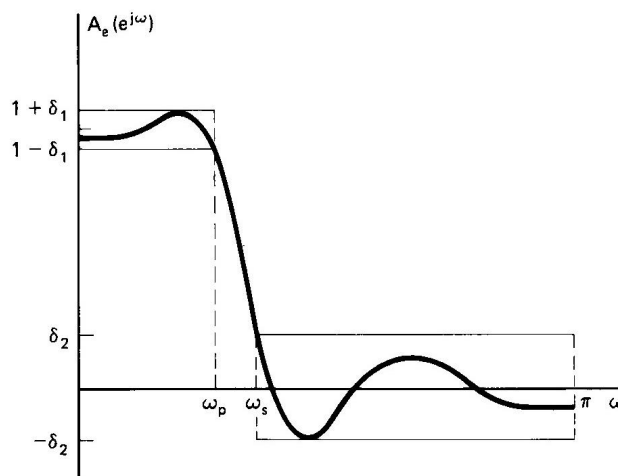
$\Rightarrow$ gunanya adalah untuk mendapatkan common form $\rightarrow$ agar lebih mudah

Sekarang **Weighted Error** :

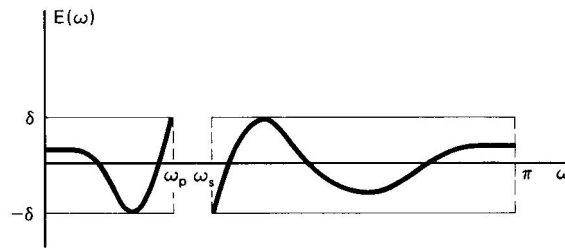
$$E(\omega) \cong W(\omega) [H_{dr}(\omega) - H_r(\omega)], \omega \in s \equiv [0, \omega_p] \cup [\omega_s, \pi]$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 desired response actual response

Grafik respons yang diinginkan dan sebenarnya:



$[H_{dr}(\omega) - H_r(\omega)]$ menentukan kesalahan sistem:



$$\text{bila } W(\omega) = \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1}, & \text{in Passband} \\ 1, & \text{in Stopband} \end{cases}$$

Jadi apabila kita berhasil meminimasi dengan max weighted error ke δ_2 , maka kita juga dapat memenuhi spesifikasi di passband pada δ_1 .

$$\begin{aligned} E(\omega) &= W(\omega)[H_{dr}(\omega) - Q(\omega)P(\omega)] \\ &= W(\omega)Q(\omega)\left[\frac{H_{dr}(\omega)}{Q(\omega)} - P(\omega)\right] \end{aligned}$$

$$\text{bila } \hat{W}(\omega) \equiv W(\omega)Q(\omega) \text{ dan } \hat{H}_{DR}(\omega) \equiv \frac{H_{dr}(\omega)}{Q(\omega)}$$

$$\rightarrow E(\omega) = \hat{W}(\omega)[\hat{H}_{dr}(\omega) - P(\omega)], \omega \in s \quad \rightarrow \text{untuk semua kasus}$$

Problem statement

Cari $a[n]$ (atau $b[n]$ atau $c[n]$ atau $d[n]$) untuk minimisasi dari maximum absolute value dari $E(\omega)$ over the passband dan stopband

$$\min \left[\max_{\omega \in s} |E(\omega)| \right]$$

Batasan jumlah extrema:

Diketahui M-point filter, berapa extrema (lokal) ada di $E(\omega)$?

$$\text{Di } P(\omega) = \sum_{n=0}^L b(n) \cos^n \omega \quad \rightarrow \text{ada } L-1 \text{ at most local extreme } (0 < \omega < \pi)$$

$\rightarrow +2$ untuk di boundary 0 dan π di $E(\omega)$ (ω_p & ω_s)

$\Rightarrow$ total at most $L+3$ extrema in $E(\omega)$

Contoh:

$$h(n) = \frac{1}{15} [1, 2, 3, 4, 3, 2, 1] \quad \rightarrow M = 7 \text{ or } L = 3$$

Teori Aproksimasi : Alternation Theory

Let S be any closed subset of the closed interval $[0, \pi]$. Kondisi perlu dan cukup agar

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^L a(k) \cos \omega k$$

menjadi unique, minimax app. to $H_{DR}(\omega)$ on S, adalah bahwa $E(\omega) \geq L+2$ "alternations" atau extremes di S, yaitu setidaknya terdapat $L + 2$ frekuensi $\{\omega_i\}$ di S sehingga

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_{L+2}, E(\omega_i) = -E(\omega_{i+1}) \text{ dan } |E(\omega_i)| = \max |E(\omega)|$$

Algoritma Parks-McClellan

Untuk mencari $P(\omega)$ secara iteratif

Asumsi: M atau L diketahui, δ_2/δ_1 diketahui

$$\rightarrow M \uparrow \delta \downarrow \quad \rightarrow \text{untuk sebuah } M \text{ ada } \delta$$

$$\text{untuk } \delta = \delta_2 \rightarrow \text{solusi diperoleh}$$

$\rightarrow$ Kaiser approximates M as

$$M = \frac{-20 \log_{10} \sqrt{d_1 d_2} - 13}{14.6 \Delta f} + 1 \quad \Delta f = \frac{w_s - w_p}{2p}$$

The Parks-McClellan

$\rightarrow$ Mulai dengan menebak $L+2$ extremes $\{\omega_i\}$

$\rightarrow$ Estimasi δ di ω_i in

$\rightarrow$ Fit $P(\omega)$ di ω_i in

$E(\omega)$ dihitung pada finite grid

Perbaiki ω_i di ulang (2)

Sampai $\delta = \delta_2$

$$\rightarrow \text{hitung } \beta(n) \rightarrow a(n) \rightarrow h(n)$$

di matlab $\rightarrow$ `remez`

`[h] = remez(N, f, m, weights, ftype)`

$$\hat{W}(w_n) [H_{dr}(w_n) - P(w_n) = (-1)^n d]$$

$$P(w_n) + \frac{(-1)^n d}{\hat{W}(w_n)} = \hat{H}_{dr}(w_n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^L a(k) \cos w_n k + \frac{(-1)^n d}{\hat{W}(w_n)} = \hat{H}_{dr}(w_n)$$

$$\rightarrow d = \frac{g_o \hat{H}_{dr}(w_o) + g_1 \hat{H}_{dr}(w_1) + \dots + g_{L+1} \hat{H}_{dr}(w_{L+1})}{\frac{g_o}{\hat{W}(w_o)} + \frac{(-1)g_1}{\hat{W}(w_1)} + \dots + \frac{(-1)^{L+1}g_{L+1}}{\hat{W}(w_{L+1})}}$$

$$\rightarrow g_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{L+1} \frac{1}{\cos w_k - \cos w_n}$$

$$P(w) = \frac{\sum_{k=0}^L P(w_k) [b_k / (x - x_k)]}{\sum_{k=0}^L [b_k / (x - x_k)]}$$

$\rightarrow$ interpolasi Lagrange

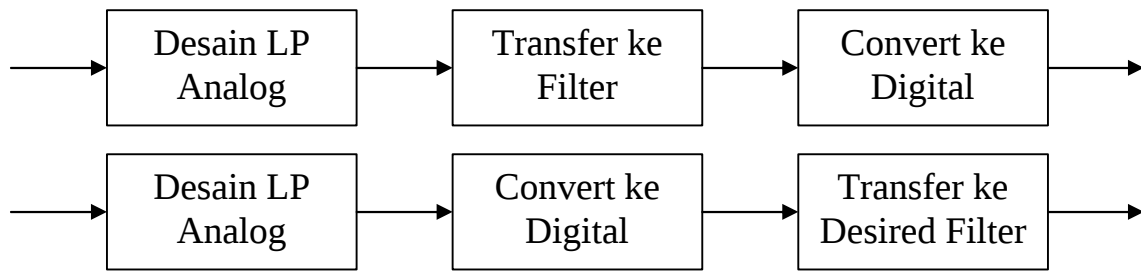
$$\text{di mana } P(w_n) = \hat{H}_{DR}(w_n) - \frac{(-1)^n d}{\hat{W}(w_n)} \quad n = 0, \dots, L+1$$

$$b_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^L \frac{1}{x_k - x_n}$$

$$E(w) = \hat{W}(w) [\hat{H}_{dr}(w) - P(w)] \rightarrow \omega \text{ fine grids}$$

bila $|E(\omega)| \geq \delta$ untuk beberapa ω_j , pilih $L+2$ largest peaks sebagai ω_i baru, dan ulangi lagi.

4 Desain IIR



Desain dari filter analog dengan fungsi sistem:

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

$\{a_k\}$ dan $\{b_k\} \rightarrow$ filter coefficient

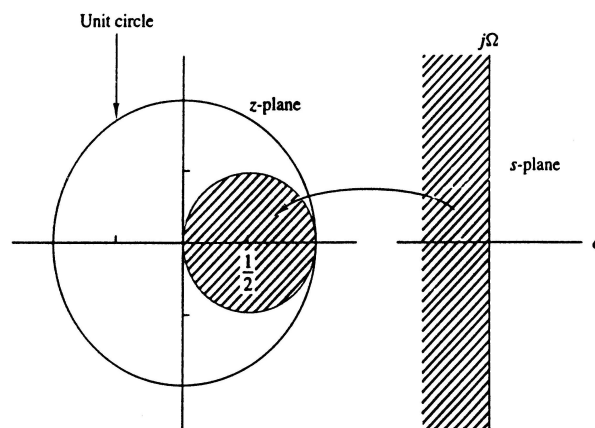
$$\text{Impulse response } h(t) \rightarrow H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

Filter analog dapat pula dinyatakan dalam persamaan differensial kengan koefisien konstan:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Filter analog LTI dengan fungsi sistem $H(s)$ akan stabil jika semua polonya terletak di sebelah kiri bidang-s. Oleh karena itu teknik konversi harus memenuhi sifat-sifat:

1. sumbu $j\Omega$ pada bidang-s dipetakan ke unit lingkaran bidang-z
2. LHP (*Left-half plane*) bidang-s dimapping ke dalam lingkaran bidang-z. Filter analog stabil dikonversikan ke filter digital stabil



Kondisi agar filter mempunyai fasa linear :

$$H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1})$$

Filter akan mempunyai pole mirror-image di luar unit lingkaran untuk setiap pole di dalam lingkaran $\rightarrow$ filter tidak stabil.

Filter IIR kausal dan stabil tidak mempunyai fasa linear.

4.1 Teknik Transformasi Bilinier

Tujuan Belajar 14

Peserta dapat mendesain IIR dengan teknik Transformasi Bilinier dari filter analog. Termasuk di dalamnya, peserta mengetahui efek warping frekuensi.

Melakukan transformasi dengan conformal mapping :

$j\Omega$ axis $\rightarrow$ unit circle once
LHP $\rightarrow$ inside unit circle
RHP $\rightarrow$ outside unit circle

Penjelasan lewat Trapezoidal Formula for untuk integrasi numerik:

Fungsi transfer filter analog linear:

$$H(s) = \frac{b}{s + a} \quad *)$$

dalam persamaan differensial:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

Dekati dengan formula Trapezoid:

$$y(t) = \int_{t_0}^t y^1(t) dt + y(t_0) \quad y^1 : \text{turunan pertama dari } y(t)$$

Pada $t = nT$; $t_0 = nT - T$:

$$y(nT) = \frac{T}{2} [y^1(nT) + y^1(nT - T)] + y(nT - T)$$

sedangkan dari *) $\rightarrow y^1(nT) = -ay(nT) + bx(nT)$

Dengan $y(n) \equiv y(nT)$ dan $x(n) \equiv x(nT)$, diperoleh hasil:

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)y(n) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)y(n-1) = \frac{bT}{2}[x(n) + x(n-1)]$$

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)Y(z) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)z^{-1}Y(z) = \frac{bT}{2}(1 + z^{-1})X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(bT/2)(1 + z^{-1})}{1 + \frac{aT}{2} - \left(\frac{1 - aT}{2}\right)z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) + a} = H(s) \bigg|_{s = \frac{2}{T}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)} \rightarrow \text{transformasi bilinear}$$

Meskipun ini diturunkan untuk orde satu, ini juga berlaku untuk orde tinggi

Karakteristik transformasi bilinear : Frequency warping

$$Z = re^{j\omega} \quad s = \sigma + j\Omega$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{T} \frac{re^{j\omega} - 1}{re^{j\omega} + 1} \\ &= \frac{2}{T} \left(\frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} \right) + j \frac{2r \sin \omega}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} \end{aligned}$$

Diperoleh :

$$s = \frac{2}{T} \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} \quad \text{dan} \quad \Omega = \frac{2r \sin \omega}{1 + r^2 + 2r \cos \omega}$$

$$r < 1 \rightarrow s < 0, r > 1 \rightarrow s > 0$$

LHP di-map ke dalam unit circle dan RHP dimap di luar unit circle

ketika $r = 1 \rightarrow \sigma = 0$, dan

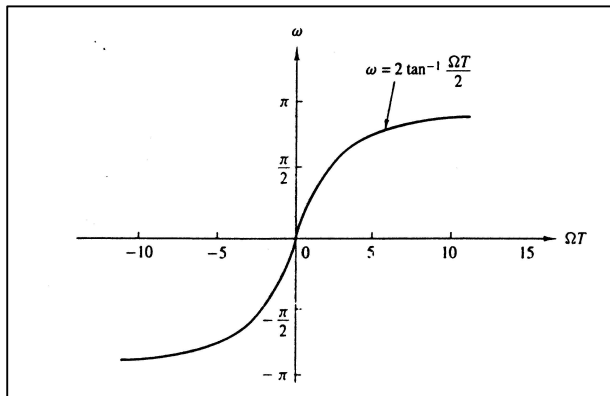
$$\Omega = \frac{2}{T} \frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega} = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2} \quad \text{atau} \quad \omega = 2 \tan^{-1} \frac{\Omega T}{2}$$

Range : $-\infty < \Omega < \infty$ dipetakan ke $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

Mapping tidak linear $\rightarrow$ kompresi frekuensi atau *frequency warping*.

untuk $s = \infty \rightarrow z = -1$, sehingga LPF single-pole dengan zero di s tak hingga menghasilkan filter digital yang mempunyai zero di $z = 1$

Pemetaan Ω ke z digambarkan sebagai berikut:



Contoh :

Konversikan $H_a(s) = \frac{s + 0.1}{(s + 0.1)^2 + 6}$ dengan transformasi bilinear:

Filter digital mempunyai frekuensi resonansi di $\omega_r = \pi/2$.

Jawab:

Analog filter punya resonansi $\Omega_r = 4$

jika frekuensi ini dipetakan ke $\omega_r = \pi/2 \rightarrow T = 1/2$

Mapping yang dikehendaki $s = 4 \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$

$$H(z) = \frac{0.128 + 0.006z^{-1} - 0.122z^{-1}}{1 + 0.0006z^{-1} + 0.975z^{-2}} ; \text{komponen } z^{-1} \text{ di penyebut diabaikan}$$

$$H(z) = \frac{0.128 + 0.006z^{-1} - 0.122z^{-1}}{1 + 0.975z^{-2}}$$

Filter ini mempunyai pole : $p_{1,2} = 0.987e^{\pm j\pi/2}$

dan zero : $z_{1,2} = -1.095$

Jadi, kita dapat membuat filter dua-pole dengan resonansi dekat $\omega = \pi/2$

Kadang-kadang T dipilih satu apabila tidak ada permintaan khusus, atau $H(s)$ dicari setelah $H_{DF}(z)$ ditentukan.

Contoh :

Desain LPF digital satu-pole dengan 3-dB bandwidth di 0.2π , dengan transformasi bilinear untuk filter analog

$$H(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$$

$\uparrow$ 3 dB BW dari AF

Solusi :

Cari Ω_c ekuivalen dari ω_c :

$$\begin{aligned} \omega_c = 0.2p \Rightarrow \Omega_c &= \frac{2}{T} \tan 0.1p \\ &= \frac{0.65}{T} \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{0.65/T}{s + 0.65/T}$$

Gunakan transformasi bilinear:

$$H(z) = \frac{0.245(1 + z^{-1})}{1 - 0.509z^{-1}} \quad (T \text{ diabaikan})$$

Frekuensi respon dari filter digital:

$$H(\omega) = \frac{0.245(1 + e^{-j\omega})}{1 - 0.509e^{-j\omega}}$$

pada $\omega = 0 \Rightarrow H(0) = 1$ dan pada $\omega = 0.2\pi \rightarrow |H(0.2\pi)| = 0.707$, yang merupakan respons yang diinginkan.

4.2 Teknik Matched z Transform

Tujuan Belajar 15

Peserta dapat mendesain IIR dengan metoda Matched z Transform.

Merupakan mapping poles/zeros $H(s) \rightarrow$ poles/zero Z-plane.

Fungsi sistem filter analog yang sudah difaktorkan:

$$H(s) = \frac{\prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \Rightarrow H(z) = \frac{\prod_{k=1}^M (1 - e^{z_k T} z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - e^{p_k T} z^{-1})}$$

z_k merupakan zero dan p_k pole, T : sampling interval.

Masing-masing faktor $(s-a)$ pada $H(s)$ dipetakan ke faktor $(1 - e^{aT} z^{-1})$

Untuk menjaga karakteristik respon filter analog, T harus dipilih untuk menghasilkan lokasi pole dan zero yang sama dalam bidang- z .

Untuk menghindari aliasing $\rightarrow T$ harus cukup kecil.

4.3 Desain Filter Analog Low Pass

Tujuan Belajar 16

Peserta mengerti karakteristik dan dapat mendesain filter analog low-pass jenis Butterworth, Chebyshev, Elliptic, dan Bessel.

Butterworth

All-pole filter LPF dikarakteristik dengan kuadrat magnitude respon:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega / \Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (\Omega / \Omega_p)^{2N}}$$

dengan $N \rightarrow$ orde filter

$\omega_c \rightarrow$ -3dB frequency (cut-off frequency)

$\omega_p \rightarrow$ frekuensi passband edge

$\frac{1}{1 + \epsilon^2} \rightarrow$ nilai band-edge dari $|H(\Omega)|^2$

Pada $s = j\Omega$ maka

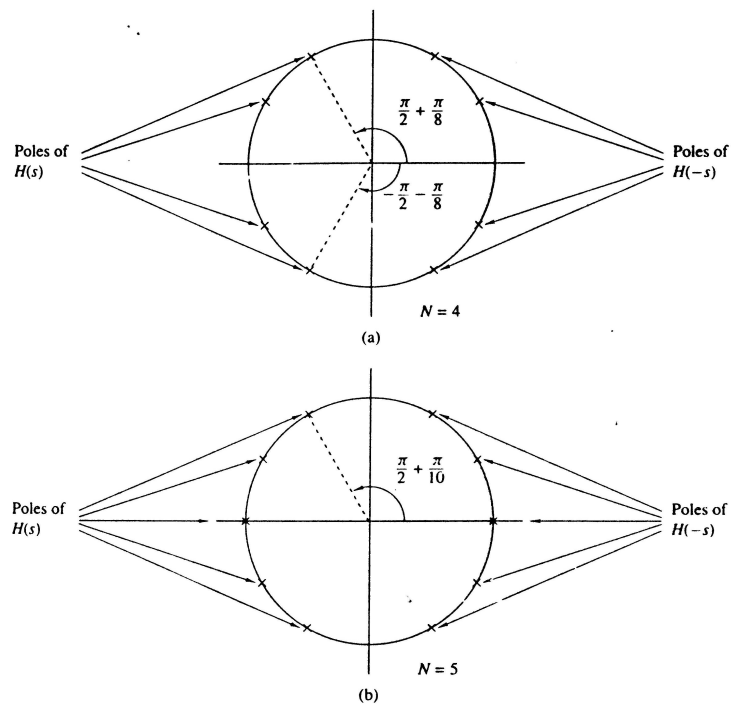
$$H(s)H(-s) \Big|_{s=j\Omega} = |H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(-s^2 / \Omega_c^2 \right)^N}$$

pole-pole dari persamaan di atas terletak pada unit circle.

$$\frac{-s^2}{\Omega_c^2} = (-1)^{1/N} = e^{j(2k+1)\pi/N} \quad k=0,1,\dots,N-1$$

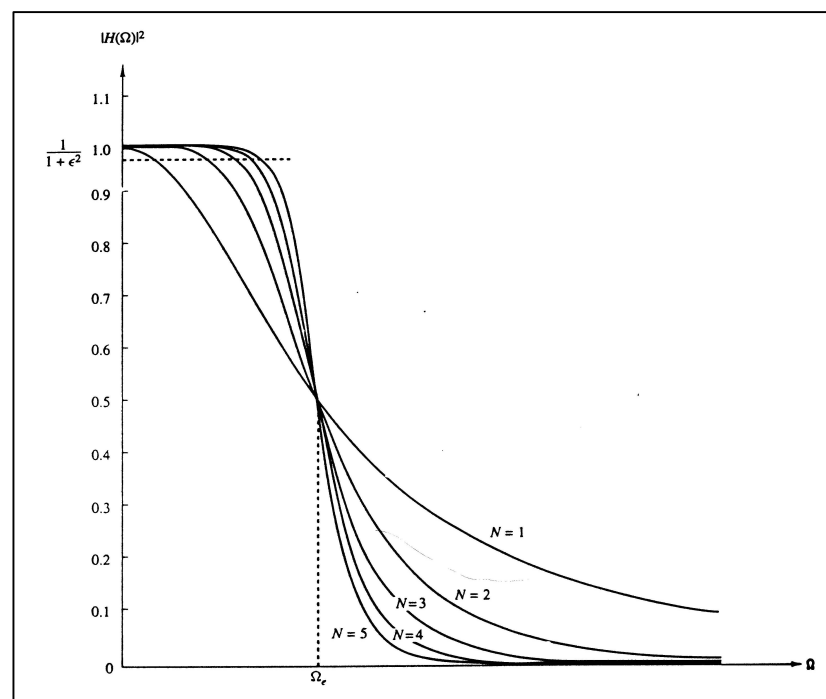
sehingga, $s_k = \Omega_c e^{jp/2} e^{j(2k+1)\pi/N} \quad k=0,1,\dots,N-1$

Contoh untuk $N = 4$ dan $N = 5$



$|H(\Omega)|^2$ monotonic di passband & stopband maka analisis relatif lebih mudah → spesifikasi dipenuhi oleh mencari N yang tepat.

Response filter Butterworth:



pada $\Omega = \Omega_s$,

$$\frac{1}{1 + \epsilon^2 (\Omega / \Omega_p)^{2n}} = d_2^2$$

$$\Rightarrow N = \frac{\log\left[\left(1/d_2^2\right) - 1\right]}{2 \log(\Omega_s / \Omega_c)} = \frac{\log(d/e)}{\log(\Omega_s / \Omega_p)}$$

dengan $d_2 = 1/\sqrt{1 + d^2}$

Jadi, filter Butterworth dikarakteristik oleh parameter N, δ_2 , ϵ dan rasio Ω_s / Ω_p .

Contoh :

Tentukan orde dan poles dari sebuah lowpass Butterworth filter, -3dB pada BW 500Hz, att 40 dB at 1000Hz

Solusi : $\Omega_c = 500.2\pi$

$$\Omega_s = 1000.2\pi$$

At 40 dB $\Rightarrow \delta_2 = 0.01$

$$N = \frac{\log_{10}(10^4 - 1)}{2 \log_{10} 2} = 6.64 \rightarrow \text{pilih } N = 7$$

Pole position :

$$S_k = 1000pe^{j\left[\frac{p}{2} + \frac{(2k+1)p}{14}\right]} \quad k = 0, 1, \dots, 6$$

Chebyshev

Type I : all pole

- equiripple in passband
- monotonic in stopband

Type II : poles + zeros

- monotonic in passband
- equiripple in stopband

Type I (all-pole):

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega / \Omega_p)}$$

$\epsilon \rightarrow$ related ripple in passband

$T_N(x) \rightarrow N$ the order Chebyshev polynomial

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x) & |x| > 1 \end{cases}$$

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x) \quad N = 1, 2, \dots$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \dots$$

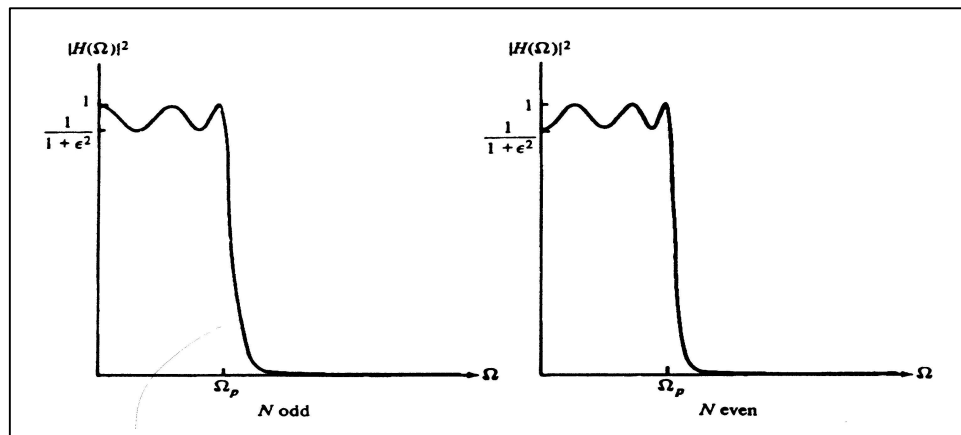
Karakteristik :

$$|T_N(x)| \leq 1 \quad \text{untuk semua } |x| \leq 1$$

$$T_N(1) = 1 \quad \text{untuk semua } N$$

Semua akar $T_N(x)$ ada di $-1 \leq x \leq 1$

Karakteristik filter Chebyshev tipe I



Pada band edge $\Omega = \Omega_p \rightarrow T_N(1) = 1$

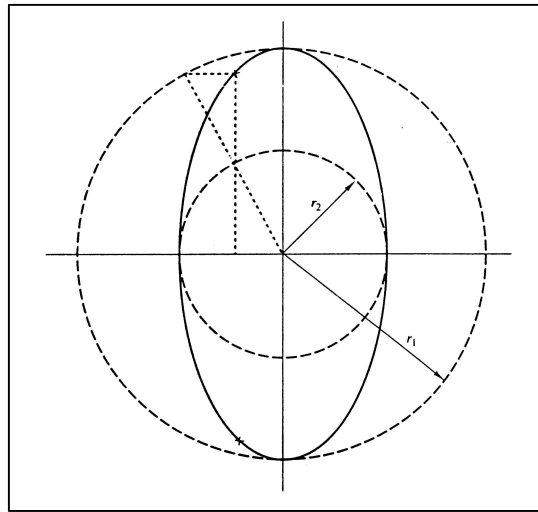
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} = 1 - d_1 \quad \epsilon^2 = \frac{1}{(1-d_1)^2} - 1$$

Poles dari Type I Chebyshev filter terletak pada ellipse in the s-plane with :

$$\text{major axis : } r_1 = \Omega_p \frac{b^2 + 1}{2b} \quad \text{dan} \quad \text{minor axis : } r_2 = \Omega_p \frac{b^2 - 1}{2b}$$

$$\text{Ripple pada stopband} \Rightarrow b = \left[\frac{\sqrt{1 + \epsilon^2} + 1}{\epsilon} \right]^{\frac{1}{N}}$$

Penentuan lokasi pole dari filter Chebyshev:



Posisi angular dari pole filter:

$$f_k = \frac{p}{2} + \frac{(2k+1)p}{2N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(x_k, y_k) \rightarrow x_k = r \cos f_k \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$y_k = r_1 \sin f_k \quad k = 0, \dots, N-1$$

Type II(zeros + poles):

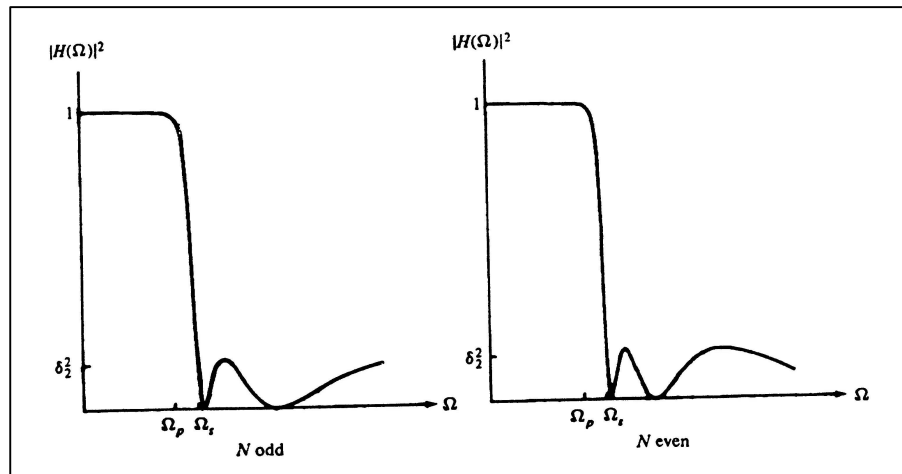
Magnitudo respon filter:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[\frac{T_N^2(\Omega_s / \Omega_p)}{T_N^2(\Omega_s / \Omega)} \right]}$$

$T(x)$ → N-th order Chebyshev

Ω_s → Stopband

Respon frekuensi filter tipe II:



zeros : $s_k = j \frac{\Omega_s}{\sin f_k}$ (sumbu imajiner)

poles : $(v_k, w_k) \quad v_k = \frac{\Omega_s x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$

$w_k = \frac{\Omega_s y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$

di mana x_k dan y_k koordinat pole.

Ripple stop-band $\rightarrow b = \left[\frac{1 + \sqrt{1 - d_2^2}}{d_2} \right]^{\frac{1}{N}}$

Jadi ,karakteristik Chebyshev filter ditentukan oleh $N, \epsilon, \delta_2, \Omega_s/\Omega_p$ untuk menentukan:

$$N = \frac{\log \left[\frac{\sqrt{1 - d_2^2} + \sqrt{1 - d_2^2 (1 + \epsilon^2)}}{\epsilon d_2} \right]}{\log \left[\left(\Omega_s / \Omega_p \right) + \sqrt{\left(\Omega_s / \Omega_p \right)^2 - 1} \right]} = \frac{\cosh^{-1}(d / \epsilon)}{\cosh^{-1}(\Omega_s / \Omega_p)}$$

$$d_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + d_2}}$$

Contoh :

Cari N dan poles of a type I lowpass Chebyshevfilter that has a 1-dB ripple in the passband cutoff frequency $\Omega_p = 1000\pi$, a stopband frequency of 2000π , att. 40dB or more for $\Omega \geq \Omega_s$

Solusi:

$$\text{Cari N : } 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2) = 1 \rightarrow \epsilon = 0.5088$$

$$20 \log_{10} d_2 = -40 \rightarrow \delta_2 = 0.01$$

$$N = \frac{\log_{10} 196.54}{\log_{10}(2 + \sqrt{3})} = 4.0 \rightarrow 4 \text{ poles}$$

$$\text{Poles : } \beta = 1.429 \quad r_1 = 1.06\Omega_p \quad r_2 = 0.365\Omega_p$$

$$f_k = \frac{p}{2} + \frac{(2k+1)p}{8} \quad k = 0, \dots, 3$$

$$x_1 + jy_1 = -0.1397\Omega_p \pm j0.979\Omega_p$$

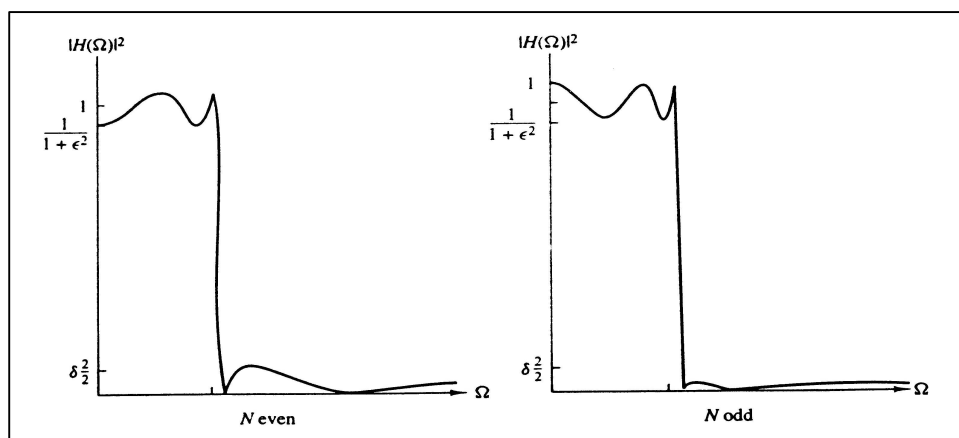
$$x_2 + jy_2 = -0.337\Omega_p \pm j0.4056\Omega_p$$

Elliptic

Equiripple in both passband/stopband

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N(\Omega / \Omega_p)^2}$$

$U_N(x)$ Jacobianelliptic function of order N



The most efficient designs occur when we spread the appr. Error equally over the passband and the stopband

⇒ Elliptic filters can do this

$$N = \frac{K(\Omega_p / \Omega_s) K\left(\sqrt{1 - (\epsilon^2 / d^2)}\right)}{K(\epsilon / d) K\left(\sqrt{1 - (\Omega_p / \Omega_s)^2}\right)}$$

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dq}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 q}} \quad \text{complete elliptic integral of the first kind}$$

$$d_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + d^2}}$$

$$\text{Passband ripple} = 10 \log_{10}(1 + \epsilon) \quad \Rightarrow \text{use computer}$$

Bessel : All-Pole

Fungsi sistem filter:

$$H(s) = \frac{1}{B_N(s)}$$

$$B_N(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k \quad \text{Nth order Bessel polynomial}$$

$$a_k = \frac{(2N - k)!}{2^{N-k} k! (N - k)!} \quad k = 0, 1, \dots, N$$

Polinomial bessel dibangkitkan:

$$\Rightarrow B_N(s) = (2N - 1)B_{N-1}(s) + s^2 B_{N-2}(s)$$

$$B_0(s) = 1 \text{ dan } B_1(s) = s + 1 \text{ sebagai kondisi initial}$$

⇒ Bessel Filter → linear phase over the passband

Sayangnya sifat ini tidak berguna di saat terjadi BT

4.4 Transformasi Filter Low Pass

Tujuan Belajar 17

Peserta dapat mendesain IIR dengan teknik Transformasi Bilinier untuk membuat filter LP, HP, BP, BS dengan bantuan transformasi jenis filter, baik di domain analog maupun di domain digital.

Proses desain DF dapat diubah menjadi problem desain AF dengan spesifikasi khusus yang diturunkan dari Bilinear Transform

LPF dapat ditransformasikan ke LPF, BPF, HPF dan BSF. Jadi diskusi dapat difokuskan ke LPF

Ada AF yang bisa digunakan Butterworth Filter, Chebyshev Filter, Elliptic Filter, Bessel Filter.