

Curve Fitting & Interpolasi

Metode Numerik



Sebuah pengukuran fisika telah dilakukan untuk menentukan hubungan antara tegangan yang diberikan kepada baja tahan-karat dan waktu yang diperlukan hingga baja tersebut patah. Delapan nilai tegangan yang berbeda dicobakan, dan data yang dihasilkan adalah [CHA91]:

Tegangan yang diterapkan, x , kg/mm^2	5	10	15	20	25	30	35	40
Waktu patah, y , jam	40	30	25	40	18	20	22	15

Persoalan: Berapa waktu patah y jika tegangan x yang diberikan kepada baja adalah 12 kg/mm^2 .

- Solusinya dicari dengan metode **pencocokan kurva** (*curve fitting*).

- Pencocokkan kurva adalah sebuah metode yang mencocokkan titik data dengan sebuah kurva (*curve fitting*) fungsi.
- Pencocokan kurva dibedakan atas dua metode:

1. Regresi

Data hasil pengukuran umumnya mengandung derau (*noise*) atau galat yang cukup berarti.

Karena data ini tidak teliti, maka kurva yang mencocokkan titik data itu tidak perlu melalui semua titik.

Kurva tersebut cukup hanya mewakili kecenderungan (*trend*) titik data, yakni kurva mengikuti pola titik sebagai suatu kelompok.

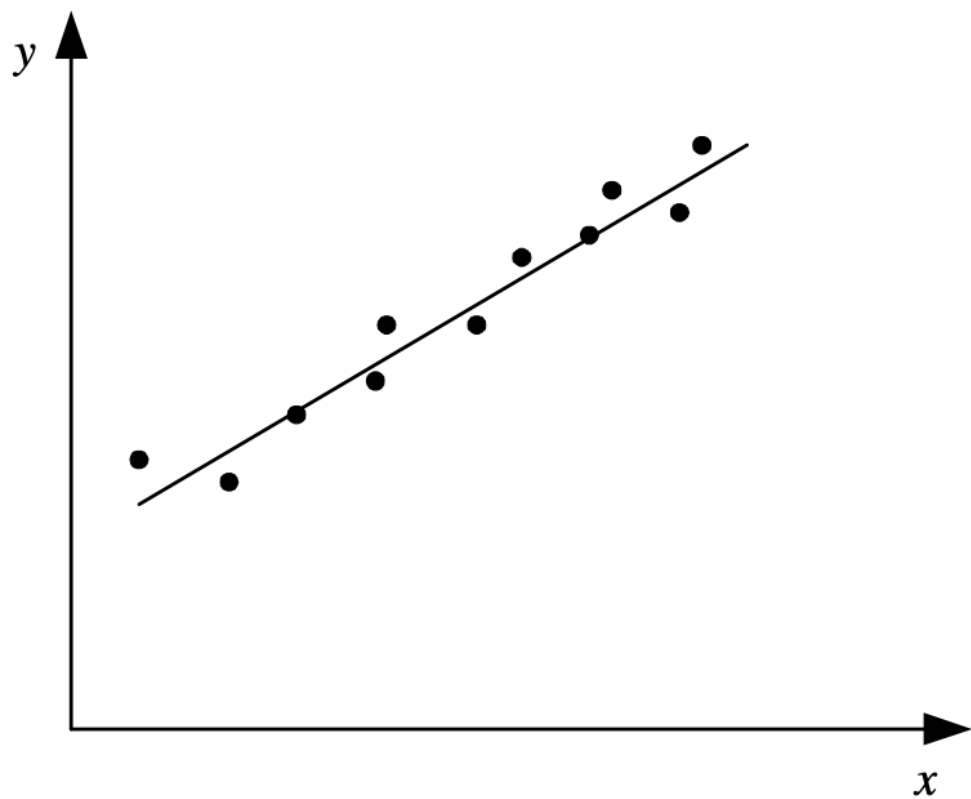
2. *Interpolasi*

Bila data diketahui mempunyai ketelitian yang sangat tinggi, maka kurva cocokannya dibuat melalui setiap titik.

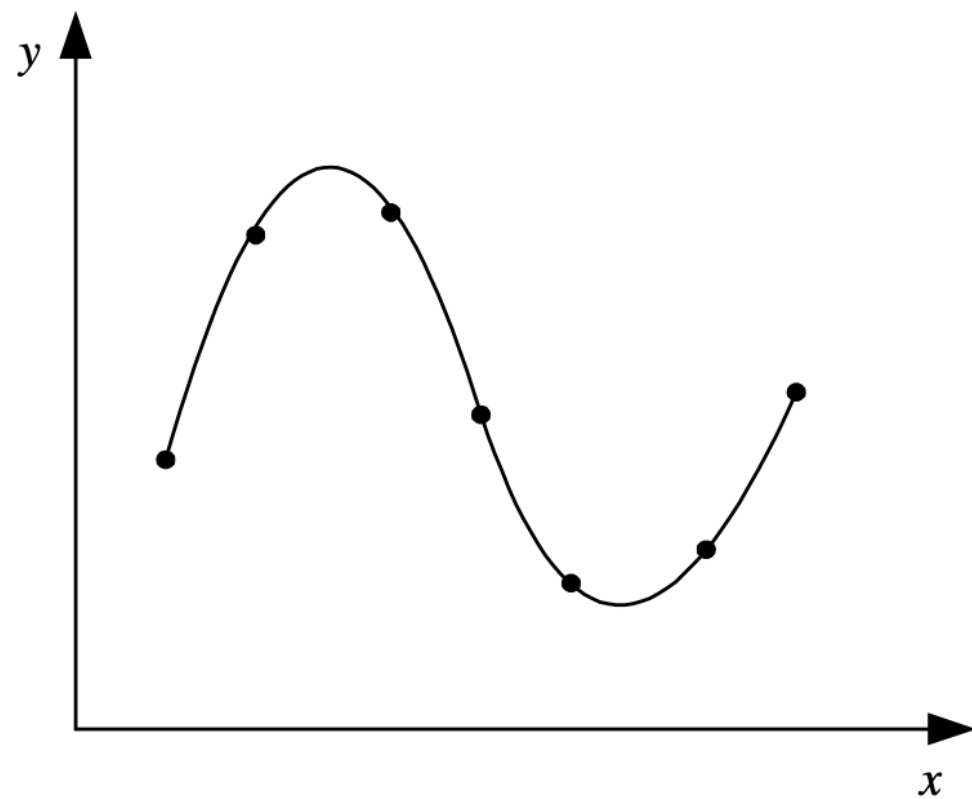
Kita katakan di sini bahwa kita **menginterpolasi** titik-titik data dengan sebuah fungsi.

Bila fungsi cocokan yang digunakan berbentuk polinom, polinom tersebut dinamakan **polinom interpolasi**.

Pekerjaan menginterpolasi titik data dengan sebuah polinom disebut **interpolasi (dengan) polinom**.



(a) Regresi



(b) Interpolasi

Aplikasi interpolasi polinom:

1. Menghampiri fungsi rumit menjadi lebih sederhana

Conntoh:

$$f(x) = \frac{\ln(2x^{1/2} - 4x^2)^3}{\sqrt{1+2x^5}}$$

Hitung: $f'(x)$ dan $\int f(x) dx$

Perhitungan men jadi lebih mudah jika $f(x)$ dihampiri dengan polinom $p(x)$.

Polinom $p(x)$ diperoleh dengan menginterpolasi beberapa titik diskrit dari $f(x)$

2. Menggambar kurva (jika hanya diketahui titik-titik diskrit saja)

Interpolasi Polinom

Persoalan:

- Diberikan $n+1$ buah titik berbeda, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.
- Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga

$$y_i = p_n(x_i) \quad \text{untuk } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

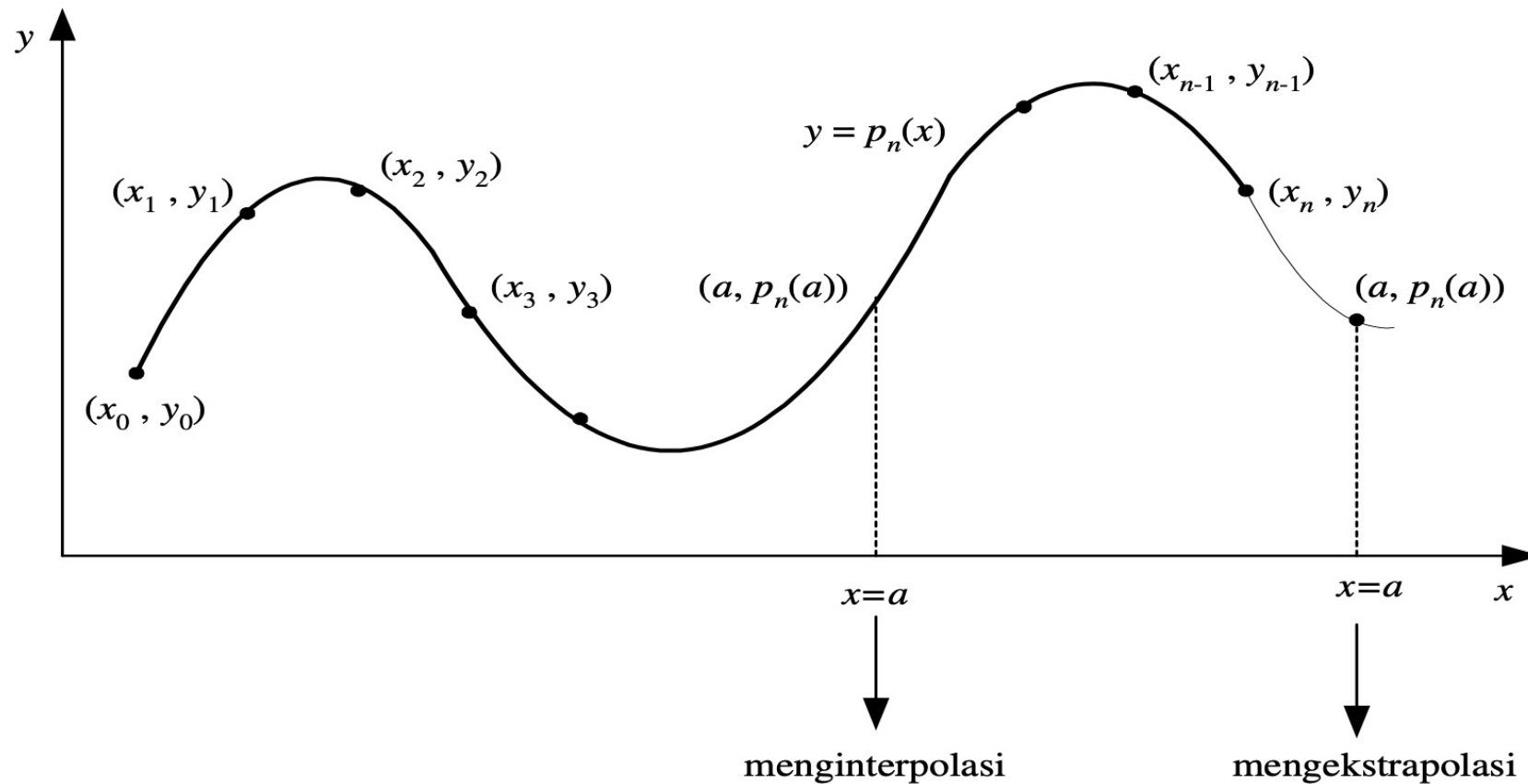
- Nilai y_i dapat berasal dari fungsi $f(x)$ sedemikian sehingga

$$y_i = f(x_i),$$

atau, y_i berasal dari nilai empiris yang diperoleh melalui percobaan atau pengamatan.

- $p_n(x)$ disebut fungsi hampiran terhadap $f(x)$.

- Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di $x = a$, yaitu $y = p_n(a)$.
- Bergantung pada letaknya, nilai $x = a$ mungkin terletak di dalam rentang titik-titik data ($x_0 < a < x_n$) atau di luar rentang titik-titik data ($a < x_0$ atau $a > x_n$):
 - 1) jika $x_0 < a < x_n$ maka $y_k = p(x_k)$ disebut **nilai interpolasi** (*interpolated value*)
 - 2) jika $a < x_0$ atau $a > x_n$ maka $y_k = p(x_k)$ disebut **nilai ekstrapolasi** (*extrapolated value*).

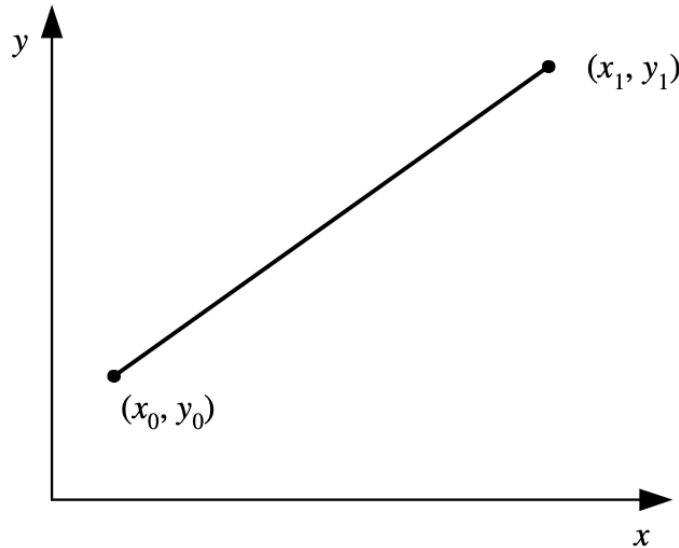


Kita dapat menginterpolasi titik data dengan:
polinom linjar, polinom kuadratik, polinom kubik,
atau polinom dari derajat yang lebih tinggi,
bergantung pada jumlah titik data yang tersedia.

1. Interpolasi Lanjar

- Interpolasi lanjar adalah interpolasi dua buah titik dengan sebuah garis lurus.
- Misal diberikan dua buah titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) . Polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah

$$p_1(x) = a_0 + a_1x$$



$$y_0 = a_0 + a_1x_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1x_1$$



$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad a_0 = \frac{x_1y_0 - x_0y_1}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x) = \frac{x_1y_0 - x_0y_1}{x_1 - x_0} + \frac{(y_1 - y_0)x}{(x_1 - x_0)}$$

Bila disederhanakan akan lebih lanjut:

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

Contoh:

Perkirakan jumlah penduduk Amerika Serikat pada tahun 1968 berdasarkan data tabulasi berikut [KRE88]:

Tahun	1960	1970
Jumlah penduduk (juta)	179.3	203.2

Penyelesaian:

Dengan menggunakan persamaan interpolasi linier diperoleh

$$p_1(1968) = 179.3 + \frac{(203.2 - 179.3)(1968 - 1960)}{1970 - 1960} = 198.4$$

Jadi, taksiran jumlah penduduk AS pada tahun 1968 adalah 198.4 juta

Contoh: Dari data $\ln(9.0) = 2.1972$, $\ln(9.5) = 2.2513$,
tentukan $\ln(9.2)$ dengan interpolasi linjar sampai 5 angka bena.
Bandingkan dengan nilai sejati $\ln(9.2) = 2.2192$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan persamaan (P.5.7), diperoleh

$$p_1(9.2) = 2.1972 + \frac{(2.2513 - 2.1972)(9.2 - 9.0)}{9.5 - 9.0} = 2.2188$$

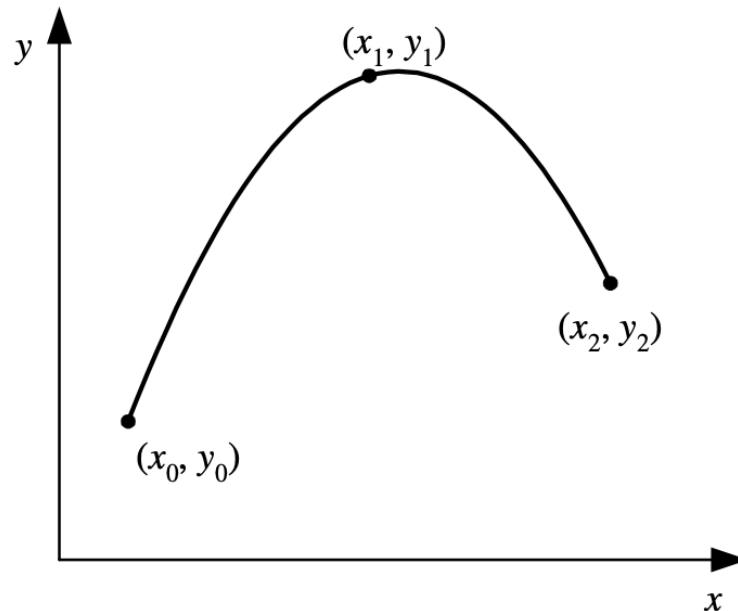
Galat = $2.2192 - 2.2188 = 0.0004$. Di sini interpolasi linjar
tidak cukup untuk memperoleh ketelitian sampai 5 angka bena.
Ia hanya benar sampai 3 angka bena.

2. Interpolasi Kuadratik

- Misal diberikan tiga buah titik data, (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , dan (x_2, y_2) .
- Polinom yang menginterpolasi ketiga buah titik itu adalah polinom kuadrat yang berbentuk:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

- Bila digambar, kurva polinom kuadrat berbentuk parabola



- Polinom $p_2(x)$ ditentukan dengan cara berikut:
 - 1) Sulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan (P.5.8), $i = 0, 1, 2$. Dari sini diperoleh tiga buah persamaan dengan tiga buah parameter yang tidak diketahui, yaitu a_0 , a_1 , dan a_2 :

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2$$

- 2) hitung a_0 , a_1 , a_2 dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss.
-

Contoh: Diberikan titik $\ln(8.0) = 2.0794$, $\ln(9.0) = 2.1972$, dan $\ln(9.5) = 2.2513$. Tentukan nilai $\ln(9.2)$ dengan interpolasi kuadratik.

Penyelesaian:

Sisten persamaan linier yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$

$$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$$

$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan $a_0 = 0.6762$, $a_1 = 0.2266$, dan $a_2 = -0.0064$. Polinom kuadratnya adalah

$$p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$$

sehingga

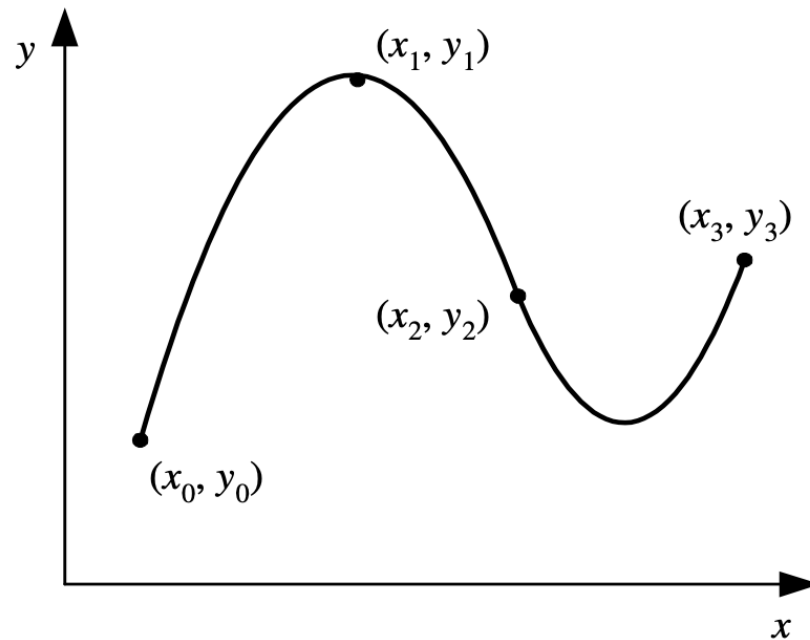
$$p_2(9.2) = 2.2192$$

yang sama dengan nilai sejatinya (5 angka bena).

3. Interpolasi Kubik

- Misal diberikan empat buah titik data, (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , dan (x_3, y_3) .
- Polinom yang menginterpolasi keempat buah titik itu adalah polinom kubik yang berbentuk:

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$



- Polinom $p_3(x)$ ditentukan dengan cara berikut:
 - 1) sulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan (P.5.9) , $i = 0, 1, 2, 3$. Dari sini diperoleh empat buah persamaan dengan empat buah parameter yang tidak diketahui, yaitu a_0 , a_1 , a_2 , dan a_3 :

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2$$

$$a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3$$

- 2) hitung a_0, a_1, a_2 , dan a_3 dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss.

- Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

asalkan tersedia $(n+1)$ buah titik data.

- Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom di atas $y = p_n(x)$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$, akan diperoleh n buah sistem persamaan linier dalam $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$,

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = y_2$$

...

...

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n$$

- Solusi sistem persamaan linier ini diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari.

- Secara umum, penentuan polinom interpolasi dengan cara yang diuraikan di atas kurang disukai,
- karena sistem persamaan linier yang diperoleh ada kemungkinan berkondisi buruk, terutama untuk derajat polinom yang semakin tinggi.
- Metode polinom interpolasi yang banyak digunakan dalam komputasi numerik adalah:
 1. Polinom Lagrange
 2. Polinom Newton
 3. Polinom Newton-Gregory (kasus khusus dari polinom Newton)