METODE NUMERIK

E3024022

Dr. Ir. Subiyanto, MIEEE

1

Metode Gauss-Siedel

Metode iterasi penyelesaian persamaan

2

Metode Gauss-Seidel

- Metode Gauss-Seidel memungkinkan pengguna untuk mengontrol kesalahan pembulatan.
- Metode eliminasi seperti Eliminasi Gauss dan Dekomposisi LU cenderung rentan terhadap kesalahan pembulatan.
- Jika sistem fisik dari masalah diketahui, tebakan awal yang dekat dapat dibuat, jumlah iterasi menurun.

3

Gauss-Siedel

Prosedur dasar:

- Selesaikan setiap persamaan linear secara aljabar untuk x_i
- Asumsikan solusi awal dengan tebakan (array)
- Selesaikan untuk setiap x_i dari tebakan awal dan ulangi
- Gunakan mutlak kesalahan pendekatan relatif setelah setiap iterasi untuk memeriksa apakah kesalahan masuk dalam toleransi yang telah ditetapkan sebelumnya.

4

Algoritma Metode Gauss-Seidel

Sekumpulan n persamaan dan n tidak diketahui:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n$$

5

Algoritma Metode Gauss-Seidel

Jika elemen-elemen diagonal bukan nol

Tulis kembali setiap persamaan dengan bentuk lain untuk pemecahan masing-masing tidak diketahui (variable)

Misal:

Persamaan pertama, pecahkan x_1

Persamaan kedua, pecahkan x_2

6

Algoritma Metode Gauss-Seidel

Penulisan kembali setiap persamaan

$$x_1 = \frac{c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \ldots\ldots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$ Dari pers. 1

$$x_2 = \frac{c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \ldots\ldots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$ Dari pers. 2

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - a_{n-1,1}x_1 - a_{n-1,2}x_2 \ldots\ldots - a_{n-1,n-2}x_{n-2} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$ Dari pers. n-1

$$x_n = \frac{c_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots\ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$ Dari pers. n

7

Algoritma Metode Gauss-Seidel

Penulisan secara umum setiap persamaan

$$x_1 = \frac{c_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} a_{1j}x_j}{a_{11}}$$

$$x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n-1}}^{n} a_{n-1,j}x_j}{a_{n-1,n-1}}$$

$$x_2 = \frac{c_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n} a_{2j}x_j}{a_{22}}$$

$$x_n = \frac{c_n - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^{n} a_{nj}x_j}{a_{nn}}$$

8

Algoritma Metode Gauss-Seidel

Atau secara umum untuk persamaan ke-i

$$x_i = \frac{c_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, i = 1,2,\ldots,n.$$

Digunakan untuk apa?

9

Algoritma Metode Gauss-Seidel

Selesaikan semua “tidak diketahui” (variable)

Misalkan tebakan awal **[X]**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n\text{-}1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Gunakan penulisan kembali persamaan untuk memecahkan setiap nilai xi.

Perlu diingat: gunakan nilai terbaru xi, untuk diterapkan pada perhitungan yang tersisa pada iterasi yang berlangsung.

10

Metode Gauss-Seidel

Hitung Mutlak Kesalahan Pendekatan Relatif

$$\left|\in_a\right|_i = \left|\frac{x_i^{new} - x_i^{old}}{x_i^{new}}\right| \times 100$$

- Jawabannya telah ditemukan?

- Iterasi dihentikan bila mutlak kesalahan pendekatan relatif kurang dari toleransi yang telah ditentukan.

11

Contoh 1

Kecepatan roket melesat keatas diberikan pada tiga waktu yang berbeda

Table 1 Data kecepatan vs waktu.

Waktu, t (s)	**Kecepatan** v (m/s)
5	106.8
8	177.2
12	279.2

Data Kecepatan didekati dengan polinomial sbb:

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \ , 5 \le \text{t} \le 12.$$

12

Contoh 1

Berapakah nilai a_1, a_2 dan a_3 untuk persamaan:

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3\ , \quad 5 \le t \le 12.$$

Maka template matriks yang dibentuk:

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Menggunakan data dari tabel 1, matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

13

Contoh 1

Misalkan tebakan awal

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

14

Contoh 1

Dari:
$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Penulisan kembali setiap persamaan:

$$a_1 = \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25}$$

$$a_3 = \frac{279.2 - 144a_1 - 12a_2}{1}$$

$$a_2 = \frac{177.2 - 64a_1 - a_3}{8}$$

15

Contoh 1

Terapkan tebakan awal dan selesaikan masing-masing a_i

Tebakan awal
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{106.8 - 5(2) - (5)}{25} = 3.6720$$

Berapa banyak dari nilai-nilai tebakan awal digunakan berikutnya?

$$a_2 = \frac{177.2 - 64(3.6720) - (5)}{8} = -7.8510$$

$$a_3 = \frac{279.2 - 144(3.6720) - 12(-7.8510)}{1} = -155.36$$

16

Contoh 1

Dapatkan mutlak kesalahan pendekatan relatif

Pada iterasi pertama diperoleh

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6720 \\ -7.8510 \\ -155.36 \end{bmatrix}$$

$$\left|\in_a\right|_i = \left|\frac{x_i^{new} - x_i^{old}}{x_i^{new}}\right| \times 100$$

$$\left|\in_a\right|_1 = \left|\frac{3.6720 - 1.0000}{3.6720}\right| x100 = 72.76\%$$

$$\left|\in_a\right|_2 = \left|\frac{-7.8510 - 2.0000}{-7.8510}\right| x100 = 125.47\%$$

$$\left|\in_a\right|_3 = \left|\frac{-155.36 - 5.0000}{-155.36}\right| x100 = 103.22\%$$

Maksimum mutlak kesalahan pendekatan relatif adalah 125.47%

17

Contoh 1

Gunakan $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6720 \\ -7.8510 \\ -155.36 \end{bmatrix}$ dari iterasi 1

Iteration 2

$$a_1 = \frac{106.8 - 5(-7.8510) - 155.36}{25} = 12.056$$

$$a_2 = \frac{177.2 - 64(12.056) - 155.36}{8} = -54.882$$

$$a_3 = \frac{279.2 - 144(12.056) - 12(-54.882)}{1} = -798.34$$

18

Contoh 1

Dapatkan mutlak kesalahan pendekatan relatif

$$\left|\in_a\right|_1 = \left|\frac{12.056 - 3.6720}{12.056}\right| x100 = 69.543\%$$

$$\left|\in_a\right|_2 = \left|\frac{-54.882 - (-7.8510)}{-54.882}\right| x100 = 85.695\%$$

$$\left|\in_a\right|_3 = \left|\frac{-798.34 - (-155.36)}{-798.34}\right| x100 = 80.540\%$$

Pada akhir perhitungan iterasi ke 2

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.056 \\ -54.882 \\ -798.54 \end{bmatrix}$$

Maksimum mutlak kesalahan pendekatan relatif adalah 85.695%

19

Contoh 1

Resume dari perhitungan seperti diatas sampai iterasi ke 6 adalah:

Iterasi	a_1	$\left\|\in_a\right\|_1 \%$	a_2	$\left\|\in_a\right\|_2 \%$	a_3	$\left\|\in_a\right\|_3 \%$
1	3.6720	72.767	−7.8510	125.47	−155.36	103.22
2	12.056	69.543	−54.882	85.695	−798.34	80.540
3	47.182	74.447	−255.51	78.521	−3448.9	76.852
4	193.33	75.595	−1093.4	76.632	−14440	76.116
5	800.53	75.850	−4577.2	76.112	−60072	75.963
6	3322.6	75.906	−19049	75.972	−249580	75.931

Perhatikan: Kesalahan relatif tidak menurun secara signifikan

Boleh dikatakan perhitungan tidak konvergen sehingga jauh bisa dipercaya untuk mendapatkan penyelesaian yang betul

Adakah yang salah?

20

Metode Gauss-Seidel - Pitfall

Meskipun telah dilakukan dengan benar, jawabannya tidak konvergen untuk mencapai jawaban yang benar

Contoh diatas menggambarkan metode Gauss-Siedel terjerumus kesalahan, tidak semua sistem akan diperoleh jawaban (konvergen)

Adakah cara membetulkan?

Suatu golongan sistem persamaan simultan selalu konvergen: persamaan yang terbentuk dari suatu matrik koefisien “Diagonally dominant”.

Diagonally dominant : [A] dalam [A] [X] = [C] jika:

$$\left|a_{ii}\right| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right|$$ Untuk semua‘i’ dan $$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right|$$ Setidaknya untuk satu‘i’

21

Metode Gauss-Seidel-Pitfall

Diagonally dominant: Koefisien pada diagonal harus sama atau lebih besar dari jumlah semua koefisien pada baris itu, dan minimal satu baris harus memiliki diagonal yang lebih besar dari jumlah koefisien pada baris itu.

22

Metode Gauss-Seidel (Terperangkap)

Manakah matriks koefisien yang diagonally dominant?

$$[A]=\begin{bmatrix} 2 & 5.81 & 34 \\ 45 & 43 & 1 \\ 123 & 16 & 1 \end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix} 124 & 34 & 56 \\ 23 & 53 & 5 \\ 96 & 34 & 129 \end{bmatrix}$$

Pada umumnya sistem fisik dengan persamaan linear simultan akan memberikan hasil bila memiliki matriks koefisien diagonally dominant.

23

Contoh 2

Sistem persamaan linier

$$\begin{aligned} 12x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 28 \\ 3x_1 + 7x_2 + 13x_3 &= 76 \end{aligned}$$

Matriks Koefisien nya adalah

$$[A]=\begin{bmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

Dengan asumsi nilai awal

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Akan konvergen kah?

24

Contoh 2

Cek apakah matriksnya diagonally dominant

$$[A]=\begin{bmatrix}12 & 3 & -5\\ 1 & 5 & 3\\ 3 & 7 & 13\end{bmatrix}$$

$$|a_{11}| = |12| = 12 \geq |a_{12}| + |a_{13}| = |3| + |-5| = 8$$

$$|a_{22}| = |5| = 5 \geq |a_{21}| + |a_{23}| = |1| + |3| = 4$$

$$|a_{33}| = |13| = 13 \geq |a_{31}| + |a_{32}| = |3| + |7| = 10$$

Benar.
Seharusnya konvergen dengan Metode Gauss-Siedel

25

Contoh 2

Tulis ulang

$$\begin{bmatrix}12 & 3 & -5\\ 1 & 5 & 3\\ 3 & 7 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 28\\ 76\end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1-3x_2+5x_3}{12}$$

$$x_2 = \frac{28-x_1-3x_3}{5}$$

$$x_3 = \frac{76-3x_1-7x_2}{13}$$

Asumsi nilai awal

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1-3(0)+5(1)}{12} = 0.50000$$

$$x_2 = \frac{28-(0.5)-3(1)}{5} = 4.9000$$

$$x_3 = \frac{76-3(0.50000)-7(4.9000)}{13} = 3.0923$$

26

Contoh 2

Mutlak galat pendekatan relatif

$$\left|\epsilon_a\right|_1 = \left|\frac{0.50000 - 1.0000}{0.50000}\right| \times 100 = 100.00\%$$

$$\left|\epsilon_a\right|_2 = \left|\frac{4.9000 - 0}{4.9000}\right| \times 100 = 100.00\%$$

$$\left|\epsilon_a\right|_3 = \left|\frac{3.0923 - 1.0000}{3.0923}\right| \times 100 = 67.662\%$$

Mutlak galat terbesar di akhir iterasi pertama adalah 100%

27

Contoh 2

Setelah iterasi ke-1

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 4.9000 \\ 3.0923 \end{bmatrix}$$

Masukkan nilai x pada persamaan

$$x_1 = \frac{1 - 3(4.9000) + 5(3.0923)}{12} = 0.14679$$

$$x_2 = \frac{28 - (0.14679) - 3(3.0923)}{5} = 3.7153$$

$$x_3 = \frac{76 - 3(0.14679) - 7(4.900)}{13} = 3.8118$$

Setelah iterasi ke-2

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.14679 \\ 3.7153 \\ 3.8118 \end{bmatrix}$$

28

Contoh 2

Iteratsi ke-2: mutlak galat pendekatan relatif

$$\left|\in_a\right|_1 = \left|\frac{0.14679 - 0.50000}{0.14679}\right| \times 100 = 240.61\%$$

$$\left|\in_a\right|_2 = \left|\frac{3.7153 - 4.9000}{3.7153}\right| \times 100 = 31.889\%$$

$$\left|\in_a\right|_3 = \left|\frac{3.8118 - 3.0923}{3.8118}\right| \times 100 = 18.874\%$$

Galat absolut maksimum 240.62%

Lebih besar dari iterasi #1. Is this a problem?

29

Contoh 2

Ulangi iterasi, didapatkan…

Itersai	a_1	$\left|\in_a\right|_1 \%$	a_2	$\left|\in_a\right|_2 \%$	a_3	$\left|\in_a\right|_3 \%$
1	0.50000	100.00	4.9000	100.00	3.0923	67.662
2	0.14679	240.61	3.7153	31.889	3.8118	18.876
3	0.74275	80.236	3.1644	17.408	3.9708	4.0042
4	0.94675	21.546	3.0281	4.4996	3.9971	0.65772
5	0.99177	4.5391	3.0034	0.82499	4.0001	0.074383
6	0.99919	0.74307	3.0001	0.10856	4.0001	0.00101

Hasil akhir $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.99919 \\ 3.0001 \\ 4.0001 \end{bmatrix}$ Mendekati solusi sejati $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

30

Latihan

Sistem persamaan linier

$$3x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 76$$
$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 28$$
$$12x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1$$

Dengan tebakan awal ?

31

Metode Gauss-Seidel

Metode Gauss-Seidel masih dapat digunakan

Matriks koefisien bukan diagonally dominant

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 13 \\ 1 & 5 & 3 \\ 12 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Tapi bila diteliti kumpulan persamaan ini sama dengan contoh 2, konvergen.

$$[A] = \begin{bmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

Jika sistem persamaan linier bukan diagonally dominant, cek dan perhatikan jika disusun ulang persamaan-persamaan bisa membentuk suatu matriks diagonally dominant.

32

Metode Gauss-Seidel

Tidak semua sistem persamaan dapat disusun kembali untuk memiliki koefisien matriks diagonal dominan.

Amati himpunan persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$$

$$x_1 + 7x_2 + x_3 = 9$$

Apakah bisa dibentuk suatu matriks diagonally dominan?

33

METODE PENYELESAIAN

- Metode grafik
- Eliminasi Gauss
- Metode Gauss – Jourdan
- Metode Gauss – Seidel
- LU decomposition

34

Next session

35