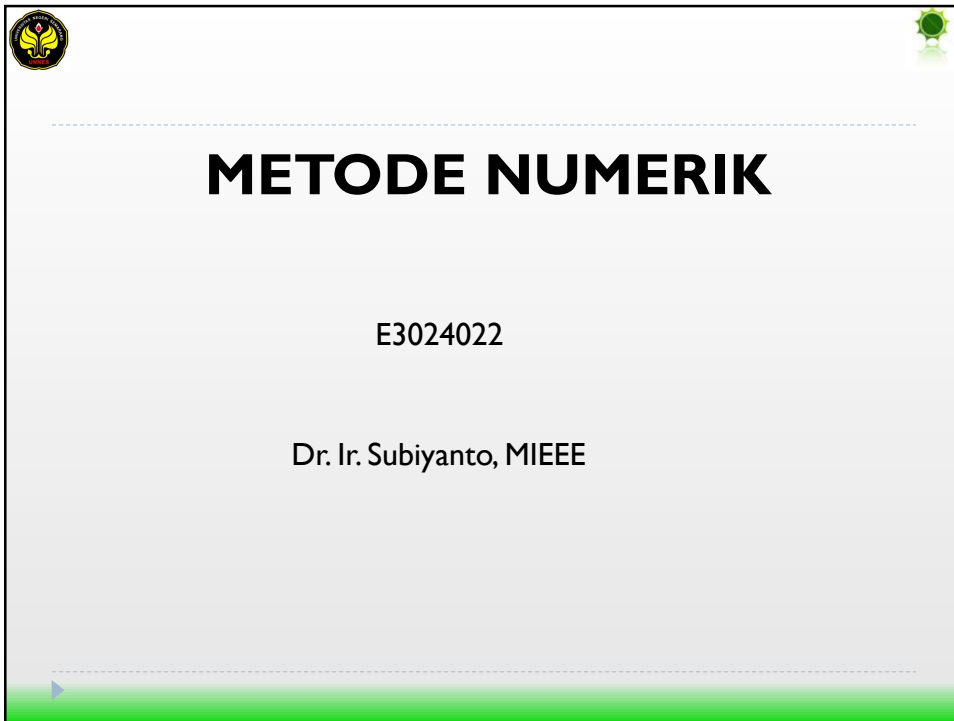
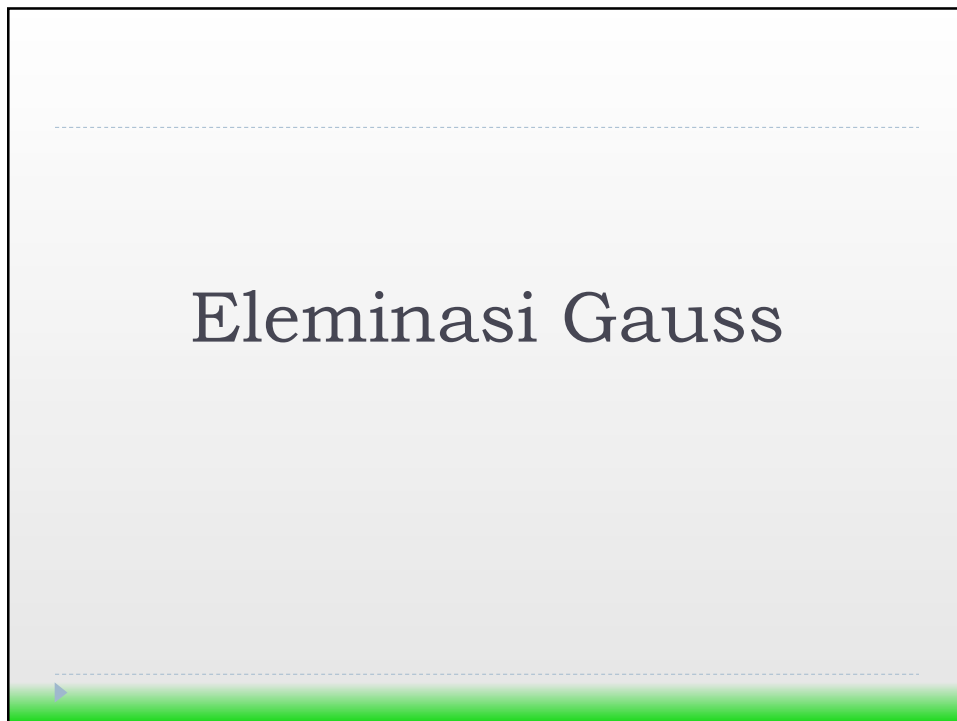




1



2

Eliminasi Gaussian

Sebuah metode untuk memecahkan persamaan linier simultan bentuk

$$[A][X]=[C]$$

Dua Step

1. Eliminasi kedepan
2. Substitusi kebelakang

3

Eliminasi Kedepan

Tujuan dari eliminasi kedepan adalah mengubah matriks koefisien menjadi matriks segitiga atas

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.21 \\ 0.735 \end{bmatrix}$$

4

Eleminasi Kedepan

Satu set n persamaan dan n variabel tidak diketahui

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

terdapat (n-1) step Eleminasi Kedepan

5

Eleminasi Kedepan

Step 1

Persamaan 1 dibagi dengan a_{11} dan dikalikan a_{21} dengan

$$\left[\frac{a_{21}}{a_{11}} \right] (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1)$$

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \dots + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}x_n = \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

6

Eleminasi Kedepan

Kurangkan persamaan 2 dengan hasil tsb,

$$\begin{array}{r}
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 - \quad a_{21}x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \dots + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}x_n = \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\
 \hline
 \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} \right) x_2 + \dots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \right) x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1
 \end{array}$$

atau $a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$

7

Eleminasi Kedepan

Ulangi prosedur ini untuk persamaan lainnya yang tersisa

$$\begin{array}{l}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
 a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\
 \vdots \\
 a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_n
 \end{array}$$

Step 1 selesai

8

Eleminasi Kedepan

Step 2

Ulangi prosedur yang sama untuk suku ke-3
Persamaan 3.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3$$

$$\vdots$$

$$a''_{n3}x_3 + \dots + a''_{nn}x_n = b''_n$$

Step 2 selesai

9

Eleminasi Kedepan

Pada akhirnya step (n-1) Eleminasi Kedepan,
sistem persamaan akan menjadi seperti

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3$$

$$\vdots$$

$$a^{(n-1)}_{nn}x_n = b^{(n-1)}_n$$

Step (n-1) selesai

10

Bentuk Matriks dari akhir step Eleminasi Kedepan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{(n-1)}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \vdots \\ b^{(n-1)}_n \end{bmatrix}$$

11

Substitusi kebelakang

Pecahkan setiap persamaan mulai dari persamaan terakhir

Contoh suatu sistem terdiri dari 3 persamaan

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.21 \\ 0.735 \end{bmatrix}$$

12

Substitusi kebelakang mulai dari persamaan terakhir

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
 a''_{33}x_3 + \dots + a''_{nn}x_n &= b''_3 \\
 &\vdots \\
 a^{(n-1)}_{nn}x_n &= b^{(n-1)}_n
 \end{aligned}$$

13

Substitusi kebelakang

Mulailah dengan persamaan terakhir karena hanya memiliki satu variabel tidak diketahui

$$x_n = \frac{b^{(n-1)}_n}{a^{(n-1)}_{nn}}$$

14

Substitusi kebelakang

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - a_{i,i+1}^{(i-1)}x_{i+1} - a_{i,i+2}^{(i-1)}x_{i+2} - \dots - a_{i,n}^{(i-1)}x_n}{a_{ii}^{(i-1)}} \text{ untuk } i = n-1, \dots, 1$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)}x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \text{ untuk } i = n-1, \dots, 1$$

15

Contoh 1

Kecepatan lepas landas pesawat diberikan pada tiga waktu yang berbeda

Tabel 1 Kecepatan vs. data waktu.

Waktu, t (s)	Kecepatan, v (m/s)
5	106.8
8	199.2
12	279.2



Data Kecepatan didekati dengan polinomial sbb:

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3, \quad 5 \leq t \leq 12.$$

Carilah kecepatan pada $t = 6$ detik.

16

Contoh 1 lanjut.

Dengan asumsi

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3, \quad 5 \leq t \leq 12.$$

Maka template matriks yang dibentuk:

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Menggunakan data dari tabel 1, matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 9 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 199.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

17

Contoh 1 lanjut.

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 9 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 199.2 \\ 279.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 64 & 9 & 1 & \vdots & 199.2 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix}$$

1. Eliminasi Kedepan
2. Substitusi kebelakang

18

Eleminasi Kedepan

19

Jumlah Step2 dari Eleminasi Kedepan

Jumlah step dari eleminasi kedepan adalah:

$$(n-1)=(3-1)=2$$

20

Eleminasi Kedepan: Step 1

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & : & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & : & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & : & 279.2 \end{bmatrix}$$

Persamaan 1 dibagi 25 dan dikalikan 64,

$$\frac{64}{25} = 2.56$$

$$[25 \ 5 \ 1 \ : \ 106.8] \times 2.56 = [64 \ 12.8 \ 2.56 \ : \ 273.408]$$

Kurangkan pers. 2 dengan hasil tsb

$$\begin{array}{r} \begin{bmatrix} 64 & 8 & 1 & : & 177.2 \\ 64 & 12.8 & 2.56 & : & 273.408 \end{bmatrix} \\ - \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & -4.8 & -1.56 & : & -96.208 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gantikan persamaan 2 dengan persamaan 2 baru tsb

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & : & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & : & -96.208 \\ 144 & 12 & 1 & : & 279.2 \end{bmatrix}$$

21

Eleminasi Kedepan: Step 1 (lanjt.)

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & : & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & : & -96.208 \\ 144 & 12 & 1 & : & 279.2 \end{bmatrix}$$

Bagi persamaan 1 dengan 25 dan kalikan dengan 144,

$$\frac{144}{25} = 5.76$$

$$[25 \ 5 \ 1 \ : \ 106.8] \times 5.76 = [144 \ 28.8 \ 5.76 \ : \ 615.168]$$

Kurangkan persamaan 3 dengan hasil tsb

$$\begin{array}{r} \begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & : & 279.2 \\ 144 & 28.8 & 5.76 & : & 615.168 \end{bmatrix} \\ - \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & -16.8 & -4.76 & : & -335.968 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gantikan persamaan 3 dengan persamaan 3 baru tsb.

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & : & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & : & -96.208 \\ 0 & -16.8 & -4.76 & : & -335.968 \end{bmatrix}$$

22

Eleminasi Kedepan: Step 2

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & : & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & : & -96.208 \\ 0 & -16.8 & -4.76 & : & -335.968 \end{bmatrix}$$

Bagi persamaan 2 dengan -4.8
Dan kalikan dengan -16.8 ,

$$\frac{-16.8}{-4.8} = 3.5$$

$$[0 \quad -4.8 \quad -1.56 \quad : \quad -96.208] \times 3.5 = [0 \quad -16.8 \quad -5.46 \quad : \quad -336.728]$$

Kurangkan persamaan 3 dengan hasil tsb

$$\begin{array}{r} [0 \quad -16.8 \quad -4.76 \quad : \quad 335.968] \\ - [0 \quad -16.8 \quad -5.46 \quad : \quad -336.728] \\ \hline [0 \quad 0 \quad 0.7 \quad : \quad 0.76] \end{array}$$

Ganti persamaan 3 dengan persamaan baru tsb

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & : & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & : & -96.208 \\ 0 & 0 & 0.7 & : & 0.76 \end{bmatrix}$$

23

Substitusi kebelakang

24

Substitusi kebelakang

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & : & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & : & -96.2 \\ 0 & 0 & 0.7 & : & 0.7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian untuk a_3

$$0.7a_3 = 0.76$$

$$a_3 = \frac{0.76}{0.7}$$

$$a_3 = 1.08571$$

25

Substitusi kebelakang (lanjt.)

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian a_2

$$-4.8a_2 - 1.56a_3 = -96.208$$

$$a_2 = \frac{-96.208 + 1.56a_3}{-4.8}$$

$$a_2 = \frac{-96.208 + 1.56 \times 1.08571}{-4.8}$$

$$a_2 = 19.6905$$

26

Substitusi kebelakang (lanjt.)

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.2 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian a_1

$$25a_1 + 5a_2 + a_3 = 106.8$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25} \\ &= \frac{106.8 - 5 \times 19.6905 - 1.08571}{25} \\ &= 0.290472 \end{aligned}$$

27

Penyelesaian Eleminasi Gaussian

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.290472 \\ 19.6905 \\ 1.08571 \end{bmatrix}$$

28

Contoh 1 lanjut.

Diperoleh vektor hasil penyelesaian

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.290472 \\ 19.6905 \\ 1.08571 \end{bmatrix}$$

Polinomial yang melewati tiga poin data:

$$\begin{aligned} v(t) &= a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \\ &= 0.290472 t^2 + 19.6905 t + 1.08571, \quad 5 \leq t \leq 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(6) &= 0.290472(6)^2 + 19.6905(6) + 1.08571 \\ &= 129.686 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

29

Next session

30