



METODE NUMERIK

Kesalahan=Galat= Error

Teknik Elektro
Unnes



Methode Numerik

The purpose of computing is insight, not numbers

(Richard Hamming, 1962)





Prinsip perhitungan dalam numerik

- ▶ **Menggunakan metode/algorithm yang tepat untuk menyelesaikan kasus yg sesuai**
“tidak ada algoritma untuk segalanya”
- ▶ **Mencari solusi pendekatan yang diperoleh dengan cepat dan error kecil**



Penyajian bilangan

Bilangan ada 2:

1. Eksak
2. Tidak eksak
 - ☐ Perhitungan matematika tidak eksak π , e ,
 - ☐ Perhitungan desimal yang berulang $0.3333....$
 - ☐ Hasil perhitungan deret tak hingga
 - ☐ Hasil pengukuran





ANALISIS GALAT

- ▶ Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi pendekatan terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yg didapatkan. Kita harus memahami dua hal, yaitu :
 - a. Pengukuran galat
 - b. Sumber galat timbul



Mengapa Mengukur Galat?

- 1) Untuk menentukan akurasi hasil-hasil perhitungan numeris.
- 2) Untuk membuat kriteria pemberhentian pada iterasi dalam algoritma.





Kesalahan Sejati

- ▶ Didefinisikan sebagai perbedaan antara nilai sesungguhnya dalam suatu perhitungan dengan nilai yang didapat dari pendekatan (misal metode numerik).

Kesalahan sejati = Nilai sejati - nilai pendekatan



Contoh kesalahan sejati

Turunan $f'(x)$ dari suatu fungsi $f(x)$ dapat didekati dengan persamaan,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

jika $f(x) = 7e^{0.5x}$ dan $h = 0.3$

- a) Dapatkan nilai pendekatan dari $f'(2)$
- b) Nilai sejati dari $f'(2)$
- c) Kesalahan sejati untuk bagian (a)



Contoh (lanjt.)

Penyelesaian:

a) Untuk $x = 2$ dan $h = 0.3$

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx \frac{f(2 + 0.3) - f(2)}{0.3} \\ &= \frac{f(2.3) - f(2)}{0.3} \\ &= \frac{7e^{0.5(2.3)} - 7e^{0.5(2)}}{0.3} \\ &= \frac{22.107 - 19.028}{0.3} = 10.263 \end{aligned}$$



Contoh (lanjt.)

Penyelesaian:

- b) Nilai sesungguhnya dari $f'(2)$ bisa didapatkan dengan menggunakan Pengetahuan kita mengenai kalkulus deferensial.

$$f(x) = 7e^{0.5x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 7 \times 0.5 \times e^{0.5x} \\ &= 3.5e^{0.5x} \end{aligned}$$

Jadi nilai sesungguhnya $f'(2)$ adalah

$$\begin{aligned} f'(2) &= 3.5e^{0.5(2)} \\ &= 9.5140 \end{aligned}$$

- c) Kesalahan sesungguhnya dihitung sebagai

$$\begin{aligned} E_t &= \text{Nilai sejati} - \text{nilai pendekatan} \\ &= 9.5140 - 10.263 = -0.722 \end{aligned}$$



Kesalahan sejati relatif

- ▶ Didefinisikan sebagai rasio antara kesalahan sejati dan nilai sejati.

$$\text{Kesalahan sejati relatif } (\epsilon_t) = \frac{\text{Kesalahan sejati}}{\text{Nilai sejati}}$$



Contoh kesalahan sejati relatif

Dari contoh sebelumnya pada kesalahan sejati,

Dapatkan kesalahan sejati relatif untuk $f(x) = 7e^{0.5x}$ pada $f'(2)$
dengan $h = 0.3$

Dari contoh sebelumnya,

$$E_t = -0.722$$

Kesalahan sejati relatif didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\epsilon_t &= \frac{\text{kesalahan sejati}}{\text{nilai sejati}} \\ &= \frac{-0.722}{9.5140} = -0.075888\end{aligned}$$

dalam presentase,

$$\epsilon_t = -0.075888 \times 100\% = -7.5888\%$$



Kesalahan pendekatan

- ▶ Apa yang dapat dilakukan jika nilai-nilai sejati tidak diketahui atau sangat sulit diperoleh?
- ▶ kesalahan pendekatan didefinisikan sebagai perbedaan antara pendekatan sekarang dan pendekatan sebelumnya.

Kesalahan pendekatan (E_a) = pendekatan sekarang – pendekatan sebelumnya



Contoh kesalahan pendekatan

untuk $f(x) = 7e^{0.5x}$ pada $x = 2$ dapatkan hal-hal berikut,

- a) $f'(2)$ menggunakan $h = 0.3$
- b) $f'(2)$ menggunakan $h = 0.15$
- c) Kesalahan pendekatan untuk nilai dari $f'(2)$ pada bagian (b)

penyelesaian:

- a) untuk $x = 2$ dan $h = 0.3$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0.3) - f(2)}{0.3}$$



Contoh (lanjt.)

Penyelesaian: (lanjt.)

$$\begin{aligned} &= \frac{f(2.3) - f(2)}{0.3} \\ &= \frac{7e^{0.5(2.3)} - 7e^{0.5(2)}}{0.3} \\ &= \frac{22.107 - 19.028}{0.3} = 10.263 \end{aligned}$$

b) untuk $x = 2$ dan $h = 0.15$

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx \frac{f(2 + 0.15) - f(2)}{0.15} \\ &= \frac{f(2.15) - f(2)}{0.15} \end{aligned}$$



Contoh (lanjt.)

Penyelesaian: (lanjt.)

$$\begin{aligned} &= \frac{7e^{0.5(2.15)} - 7e^{0.5(2)}}{0.15} \\ &= \frac{20.50 - 19.028}{0.15} = 9.8800 \end{aligned}$$

c) Jadi kesalahan pendekatan, E_a adalah

$$\begin{aligned} E_a &= \text{Pendekatan sekarang} - \text{pendekatan sebelumnya} \\ &= 9.8800 - 10.263 \\ &= -0.38300 \end{aligned}$$



Kesalahan pendekatan relatif

- ▶ Didefinisikan sebagai rasio antara kesalahan pendekatan dengan pendekatan sekarang.

$$\text{Kesalahan pendekatan relatif } (\epsilon_a) = \frac{\text{Kesalahan pendekatan}}{\text{Pendekatan sekarang}}$$



Contoh: kesalahan pendekatan relatif

untuk $f(x) = 7e^{0.5x}$ pada $x = 2$, dapatkan kesalahan pendekatan relatif menggunakan nilai dari $h = 0.3$ dan $h = 0.15$

penyelesaian:

Untuk contoh 3, nilai pendekatan dari $f'(2) = 10.263$

menggunakan $h = 0.3$ dan $f'(2) = 9.8800$ menggunakan $h = 0.15$

$$\begin{aligned} E_a &= \text{Pendekatan sekarang} - \text{pendekatan sebelumnya} \\ &= 9.8800 - 10.263 \\ &= -0.38300 \end{aligned}$$



Contoh (lanjt.)

Penyelesaian: (lanj.)

$$\begin{aligned}\epsilon_a &= \frac{\text{Kesalahan pendekatan}}{\text{Pendekatan sekarang}} \\ &= \frac{-0.38300}{9.8800} = -0.038765\end{aligned}$$

dalam prosentase,

$$\epsilon_a = -0.038765 \times 100 \% = -3.8765 \%$$

Kesalahan pendekatan relatif mutlak juga dapat dihitung dengan,

$$|\epsilon_a| = |-0.038765| = 0.038765 \text{ or } 3.8765\%$$



Pada umumnya kesalahan relatif mutlak digunakan sebagai suatu kriteria pemberhentian

jika $|\epsilon_a| \leq \epsilon_s$ dimana ϵ_s adalah suatu nilai toleransi yang ditetapkan terlebih dahulu sehingga tidak ada iterasi lebih lanjut diperlukan dan proses dihentikan.

Jika sekurang-kurangnya m digit penting yang diperlukan untuk mendapatkan jawaban akhir yang benar, maka

$$|\epsilon_a| \leq 0.5 \times 10^{2-m} \quad \%$$



Tabel nilai-nilai

Untuk $f(x) = 7e^{0.5x}$ pada $x = 2$ dengan ukuran langkah berbagai, h

h	$f'(2)$	$ \epsilon_a $	m
0.3	10.263	N/A	0
0.15	9.8800	3.877%	1
0.10	9.7558	1.273%	1
0.01	9.5378	2.285%	1
0.001	9.5164	0.2249%	2



Tinjauan Deret Taylor





Apakah deret Taylor?

Beberapa contoh deret taylor yang perlu diperhatikan

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \Lambda$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \Lambda$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \Lambda$$



Deret Taylor Umum

Bentuk umum dari deret Taylor diberikan sbb:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \Lambda$$

dengan ketentuan semua turunan dari $f(x)$ adalah kontinu dan berada dalam interval $[x, x+h]$



Contoh Deret Taylor

Tentukan nilai dari $f(6)$ bila diberikan $f(4)=125$, $f'(4)=74$,
 $f''(4)=30$, $f'''(4)=6$ dan semua turunan order lebih tingginya lagi
dari $f(x)$ pada $x=4$ adalah nol.

Penyelesaian:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \Lambda$$

$$x = 4$$

$$h = 6 - 4 = 2$$



Contoh (lanjt.)

Penyelesaian : (lanjt.)

Sejak turunan order lebih tinggi adalah nol,

$$f(4+2) = f(4) + f'(4)2 + f''(4)\frac{2^2}{2!} + f'''(4)\frac{2^3}{3!}$$

$$f(6) = 125 + 74(2) + 30\left(\frac{2^2}{2!}\right) + 6\left(\frac{2^3}{3!}\right)$$

$$= 125 + 148 + 60 + 8$$

$$= 341$$



Penurunan Deret Maclaurin untuk e^x

Deret Maclaurin ditentukan

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \Lambda$$

Deret Maclaurin adalah penyederhanaan deret Taylor pada point $x=0$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f''''(x)\frac{h^4}{4!} + f'''''(x)\frac{h^5}{5!} + \Lambda$$

$$f(0+h) = f(0) + f'(0)h + f''(0)\frac{h^2}{2!} + f'''(0)\frac{h^3}{3!} + f''''(0)\frac{h^4}{4!} + f'''''(0)\frac{h^5}{5!} + \Lambda$$



penurunan (lanj.)

Sejak $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ..., $f^n(x) = e^x$ dan

$$f^n(0) = e^0 = 1$$

deret Maclaurin menjadi

$$\begin{aligned} f(h) &= (e^0) + (e^0)h + \frac{(e^0)}{2!}h^2 + \frac{(e^0)}{3!}h^3 \dots \\ &= 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 \dots \end{aligned}$$

Sehingga,

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$



Kesalahan atau galat deret Taylor

Polinomial Taylor order n dari fungsi $f(x)$ dengan $(n + 1)$ derivatif kontinu dalam domain $[x, x + h]$ diberikan oleh

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + R_n(x)$$

di mana sisanya diberikan oleh

$$R_n(x) = \frac{(x-h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

dimana

$$x < c < x+h$$

Dengan, c adalah beberapa titik dalam domain $[x, x + h]$



Contoh galat dalam deret Taylor

Deret Taylor untuk e^x pada titik $x = 0$ diberikan oleh

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \Lambda$$

Berapa banyak suku yang akan diperlukan pendekatan e^1 sehingga besarnya kesalahan mutaknya kurang dari 10^{-6} ?



Contoh (lanjt.)

Penyelesaian:

Menggunakan $(n+1)$ suku dalam deret Taylor memberikan batas galat

$$R_n(x) = \frac{(x-h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad x=0, h=1, f(x) = e^x$$

$$R_n(0) = \frac{(0-1)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e^c$$

Sejak

$$x < c < x+h$$

$$0 < c < 0+1$$

$$0 < c < 1$$

$$\frac{1}{(n+1)!} < |R_n(0)| < \frac{e}{(n+1)!}$$



Contoh (lanjt.)

Penyelesaian: (lanjt.)

Jadi jika kita ingin mendapatkan berapa suku yang akan diperlukan untuk mendekati e^1 dalam batasan galat mutlak kurang dari 10^{-6}

$$\frac{e}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

,

$$(n+1)! > 10^6 e$$

$$(n+1)! > 10^6 \times 3$$

$$n \geq 9$$

Sehingga 9 suku atau lebih diperlukan untuk mendapatkan galat kurang dari 10^{-6}



Contoh (lanjt.)

Hal ini dapat dilihat bahwa sejumlah suku yang meningkat, kesalahan menurun dan karenanya estimasi dari fungsi tersebut dapat ditemukan.



▶ Alur perhitungan



Sumber-sumber galat :

- ▶ Galat yang ada pada input :
 - ▶ Chopping/truncation error
 - ▶ Rounding error
 - ▶ Bilangan yang dimasukkan bukan bilangan eksak

▶ Galat yang ada pada proses :

- ▶ Rambatan galat
- ▶ Rumus/metode/algorithm tidak tepat
- ▶ Kesalahan alat
- ▶ Human error

▶ Galat pada output :

- ▶ Chopping/truncation error
 - ▶ Rounding error
-





SUMBER UTAMA GALAT NUMERIK

- ▶ Secara umum terdapat dua sumber utama penyebab galat dlm perhitungan numerik, yaitu :
 1. Galat pemotongan (*truncation error*)
 2. Galat pembulatan (*round-off error*)

Ada sumber galat lain, yaitu :

1. Galat eksperimental
2. Galat pemrograman





(1) Galat Pemotongan (*truncation error*)

Galat ini timbul akibat penggunaan pendekatan sebagai pengganti formula eksak. Maksudnya, ekspresi matematika yg lebih kompleks diganti dengan formula yg lebih sederhana.

Tipe galat pemotongan bergantung pd metode komputasi yg digunakan untuk pendekatan shg kadang-kadang disebut juga galat *metode*.





Contoh Galat Pemotongan

Pengambilan hanya beberapa suku dari suatu deret

Maclaurin untuk mendekati e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Jika suku yang digunakan seperti diatas,

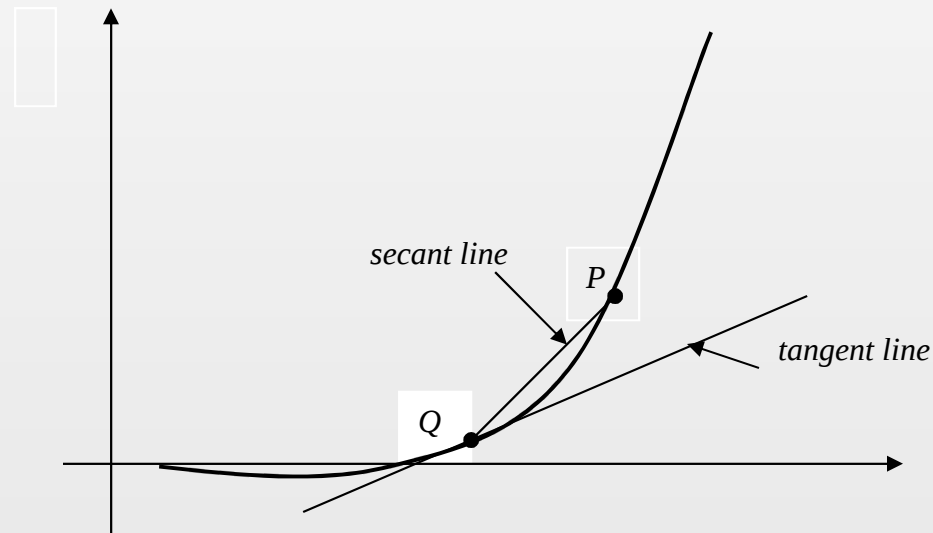
$$\text{Galat pemotongan} = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right)$$



Contoh lain

Menggunakan suatu Δx Untuk mendekati $f'(x)$

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

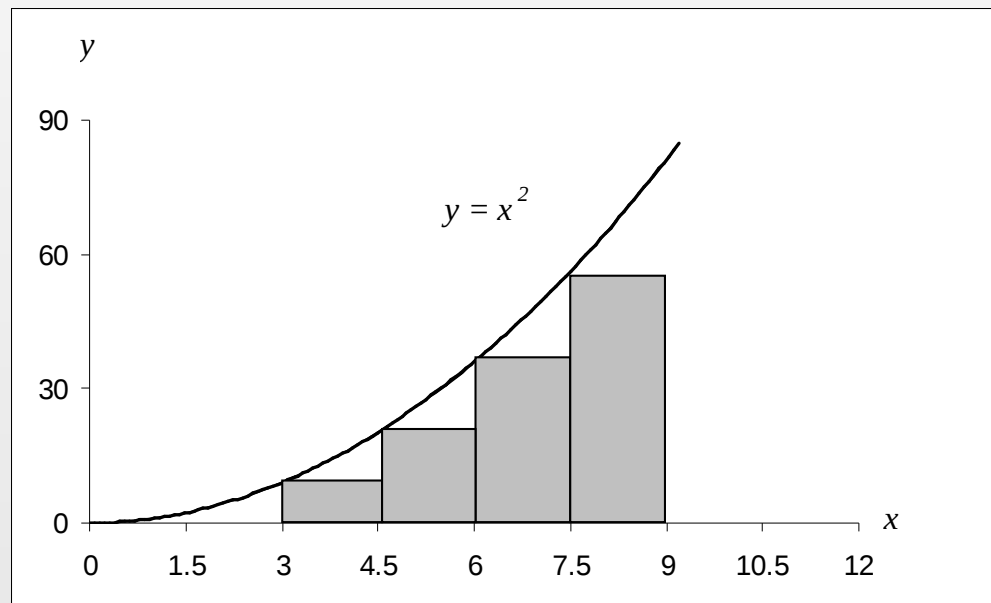


gambar 1. Derivatif didekati dengan finite Δx



Contoh lain lagi

Menggunakan finite persegi untuk mendekati suatu integral.

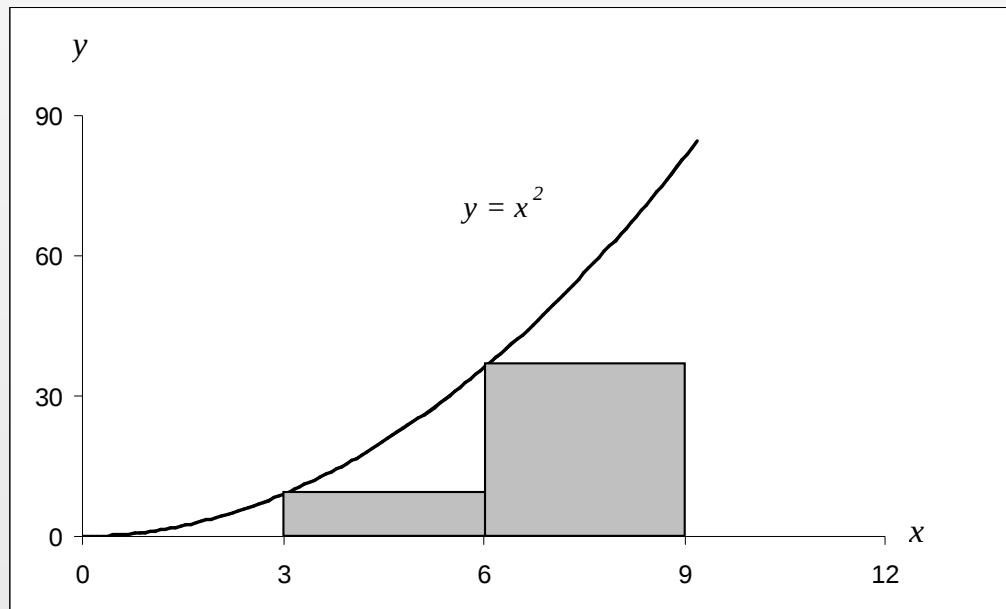




Contoh perhitungan — Integration

Gunakan 2 persegi panjang yang sama lebarnya untuk mendekati area dibawah kurva

$f(x) = x^2$ pada interval $[3,9]$



$$\int_3^9 x^2 dx$$



Contoh Integrasi (cont.)

Memilih lebar sebesar 3, kita mempunyai

$$\begin{aligned}\int_3^9 x^2 dx &= (x^2) \Big|_{x=3}^{6-3} (6-3) + (x^2) \Big|_{x=6}^{9-6} (9-6) \\ &= (3^2)3 + (6^2)3 \\ &= 27 + 108 = 135\end{aligned}$$

Nilai sesungguhnya diberikan dengan

$$\int_3^9 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_3^9 = \left[\frac{9^3 - 3^3}{3} \right] = 234$$

Sehiungga galat pemotongannya adalah

$$234 - 135 = 99$$

Coba hitung bila dengan 4 persegi panjang berapa galat pemotongan?



GALAT PEMBULATAN

- ▶ Perhitungan dgn metode numerik hampir selalu menggunakan bilangan riil. Masalah timbul bila komputasi numerik dikerjakan dengan komputer karena semua bilangan riil tdk dapat disajikan secara tepat di dlm komputer. Keterbatasan komputer dlm menyajikan bilangan riil menghasilkan galat yg disebut *galat pembulatan*.



► Contoh :

$1/6 = 0,16666666$, kalau 6 digit komputer hanya menuliskan $0,166667$.

Galat pembulatannya $= 1/6 - 0,166667 = -0,00000033$.

Kebanyakan komputer digital mempunyai dua cara penyajian bilangan riil, yaitu :

(a). Bilangan titik tetap (*fixed point*)

Contoh : 62.358; 0,013; 1.000



(b). Bilangan titik kambang (*floating point*)

Contoh : $0,6238 \times 10^3$ atau $0,6238E+03$

$0,1714 \times 10^{-13}$ atau

$0,1714E-13$

Digit-digit berarti di dalam format bilangan titik kambang disebut juga “*Angka Bena*” (*significant figure*).





ANGKA BENAR

- ▶ Adalah angka bermakna, angka penting atau angka yg dapat digunakan dgn pasti.

- ▶ Contoh :

43.123 memiliki 5 angka benar (4,3,1,2,3)

0,1764 memiliki 4 angka benar (1,7,6,4)

0,0000012 memiliki 2 angka benar (1,2)

278.300 memiliki 6 angka benar (2,7,8,3,0,0)

0,0090 memiliki 2 angka benar (9,0)

GALAT TOTAL

- ▶ Galat akhir atau galat total pada solusi numerik merupakan jumlah galat pemotongan dan galat pembulatan.
- ▶ Contoh :

$$\cos(0,2) \approx 1 - \frac{(0,2)^2}{2} + \frac{(0,2)^4}{24} \approx 0,9800667$$

Galat pemotongan

Galat pembulatan



- ▶ Galat pemotongan timbul karena kita menghampiri $\cos(0,2)$ s/d suku orde 4 sedangkan galat pembulatan timbul karena kita membulatkan nilai pendekatan ke dalam 7 digit bena.



Orde Pendekatan

- ▶ Di dalam metode numerik, fungsi $f(x)$ sering diganti dgn fungsi pendekatan yang lebih sederhana. Satu cara mengungkapkan tingkat ketelitian pendekatan itu adalah dengan menggunakan notasi :
O-Besar (Big-Oh).



- ▶ **Misal** : $f(h)$ dihampiri dgn fungsi $p(h)$.

Jika $|f(h)-p(h)| \leq M|h^n|$, yg dlm hal ini M adalah konstanta riil > 0 , maka kita katakan bahwa $p(h)$ menghampiri $f(h)$ dengan orde pendekatan $O(h^n)$ dan ditulis dgn :

$$f(h) = p(h) + O(h^n)$$

$O(h^n)$ juga dapat diartikan sebagai orde galat dari pendekatan fungsi. Karena h umumnya cukup kecil, yaitu < 1 , maka semakin tinggi nilai n semakin kecil galat, yg berarti semakin teliti pendekatan fungsinya.



- ▶ Metode yg berorde $O(h^2)$ misalnya, lebih teliti drpd metode yg berorde $O(h)$. Juga pada metode yg berorde $O(h^2)$, jika ukuran h dijadikan setengah kali semula, maka galatnya menjadi seperempat kali galat semula.

Umumnya deret Taylor digunakan untuk menghampiri fungsi. Misalkan :

$x_{i+1} = x_i + h$, $i=0,1,2,\dots$. Adalah titik-titik sebesar h , maka pendekatan $f(x_{i+1})$ dengan deret Taylor di sekitar x_i adalah :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots + \frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} f^{(n)}(x_i) + R_n(x_{i+1})$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h}{1!} f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_i) + R_n(x_{i+1})$$

Dalam hal ini :

$$R_n(x_{i+1}) = \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) = O(h^{n+1}); x_i < t < x_{i+1}$$

Jadi, kita dapat menuliskan :

$$f(x_{i+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_i) + O(h^{n+1})$$

► Contoh :

$$f(x) = e^x = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^5)$$

$$f(x) = \ln(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + O(h^5)$$

$$f(x) = \sin(h) = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + O(h^7)$$

$$f(x) = \cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + O(h^8)$$



Perambatan Galat (Error)





Perambatan Galat

Dalam metode numerik, perhitungan tidak dibuat dengan angka pastinya.

Bagaimana ketidakakuratan tersebut merambat melalui sepanjang perhitungan?



Contoh 1:

Dapatkan batas untuk perambatan dalam menambahkan dua angka. Sebagai contoh jika kita menghitung $X + Y$ di mana

$$X = 1.5 \pm 0.05$$

$$Y = 3.4 \pm 0.04$$

Penyelesaian

Nilai kemungkinan maksimum dari $X = 1.55$ dan $Y = 3.44$

Nilai kemungkinan maksimum dari $X + Y = 1.55 + 3.44 = 4.99$

Nilai kemungkinan minimum dari $X = 1.45$ and $Y = 3.36$.

Nilai kemungkinan minimum dari $X + Y = 1.45 + 3.36 = 4.81$

Karena itu

$$4.81 \leq X + Y \leq 4.99.$$



Perambatan galat dalam rumus-rumus

jika f Adalah suatu fungsi dari beberapa variabel $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n-1}, X_n$
maka nilai galat kemungkinan maksimum adalah Δf

$$\Delta f \approx \left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \Delta X_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial X_2} \Delta X_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial X_{n-1}} \Delta X_{n-1} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial X_n} \Delta X_n \right|$$

contoh 2:

Regangan dalam suatu anggota aksial pada suatu penampang persegi diberikan oleh

$$\epsilon = \frac{F}{h^2 E}$$

diberikan

$$F = 72 \pm 0.9 \text{ N}$$

$$h = 4 \pm 0.1 \text{ mm}$$

$$E = 70 \pm 1.5 \text{ GPa}$$

Dapatkan kemungkinan kesalahan maksimum regangan yang.

contoh 2:

penyelesaian

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{72}{(4 \times 10^{-3})^2 (70 \times 10^9)} \\ &= 64.286 \times 10^{-6} \\ &= 64.286 \mu\end{aligned}$$

$$\Delta \epsilon = \left| \frac{\partial \epsilon}{\partial F} \Delta F \right| + \left| \frac{\partial \epsilon}{\partial h} \Delta h \right| + \left| \frac{\partial \epsilon}{\partial E} \Delta E \right|$$

contoh 2:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial F} = \frac{1}{h^2 E} \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial h} = -\frac{2F}{h^3 E} \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial E} = -\frac{F}{h^2 E^2}$$

Maka

$$\begin{aligned} \Delta E &= \left| \frac{1}{h^2 E} \Delta F \right| + \left| \frac{2F}{h^3 E} \Delta h \right| + \left| \frac{F}{h^2 E^2} \Delta E \right| \\ &= \left| \frac{1}{(4 \times 10^{-3})^2 (70 \times 10^9)} \times 0.9 \right| + \left| \frac{2 \times 72}{(4 \times 10^{-3})^3 (70 \times 10^9)} \times 0.0001 \right| \\ &\quad + \left| \frac{72}{(4 \times 10^{-3})^2 (70 \times 10^9)^2} \times 1.5 \times 10^9 \right| \end{aligned}$$

Sehingga $= 5.3955 \mu$

$$\epsilon = (64.286 \mu \pm 5.3955 \mu)$$

Maka 3:

Pengurangan angka yang hampir sama dapat menciptakan ketidakakuratan yang tidak diinginkan. Dapat ditunjukkan perambatan kesalahan menggunakan rumus.

Misalkan

$$z = x - y$$

Kemudian

$$|\Delta z| = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x \right| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right|$$

Sehingga perubahan relatifnya

$$\begin{aligned} &= |(1)\Delta x| + |(-1)\Delta y| \\ &= |\Delta x| + |\Delta y| \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|x - y|}$$

contoh 3:

Sebagai contoh jika

$$x = 2 \pm 0.001$$

$$y = 2.003 \pm 0.001$$

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = \frac{|0.001| + |0.001|}{|2 - 2.003|}$$

$$= 0.6667$$

$$= 66.67\%$$



Tugas

1. Lanjutkan contoh
2. Floating point
3. Perambatan galat

