METODE NUMERIK

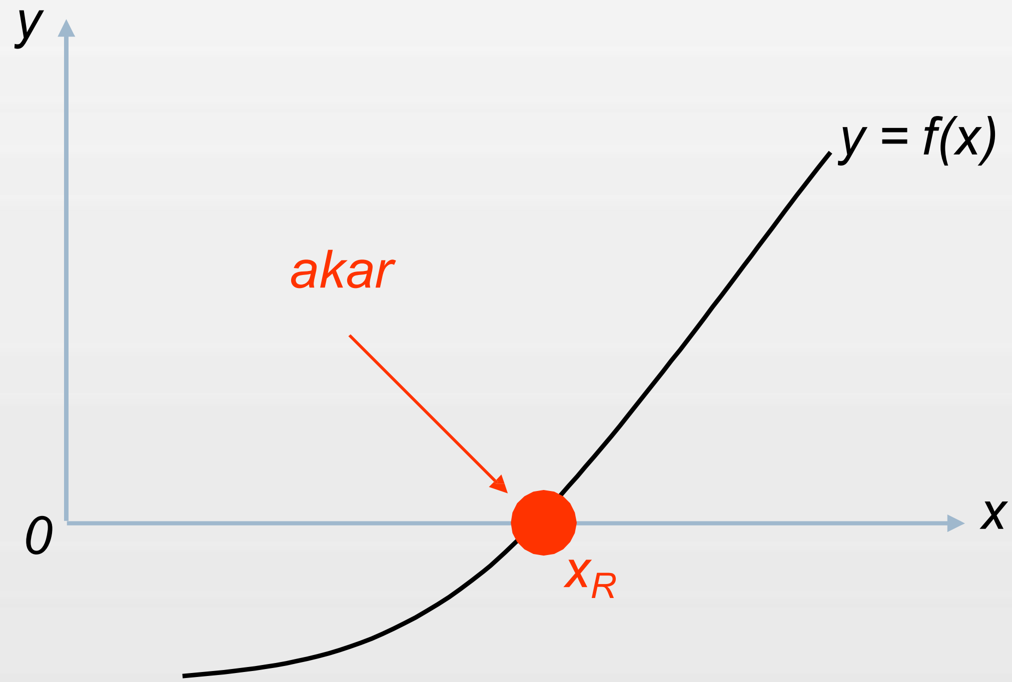
E3024022

Mencari Akar Persamaan

Pendahuluan

- Akar-akar suatu persamaan dari suatu fungsi f(x) sebenarnya adalah harga x yang membuat f(x) = 0.
- Jadi untuk mencari akar-akar suatu persamaan adalah dengan menyelesaikan persamaan

$$f(x) = 0$$



Pendahuluan

Pada mulanya penyelesian suatu akar persamaan menggunakan metode analitis.

$$f(x) = x^2 - 4x$$

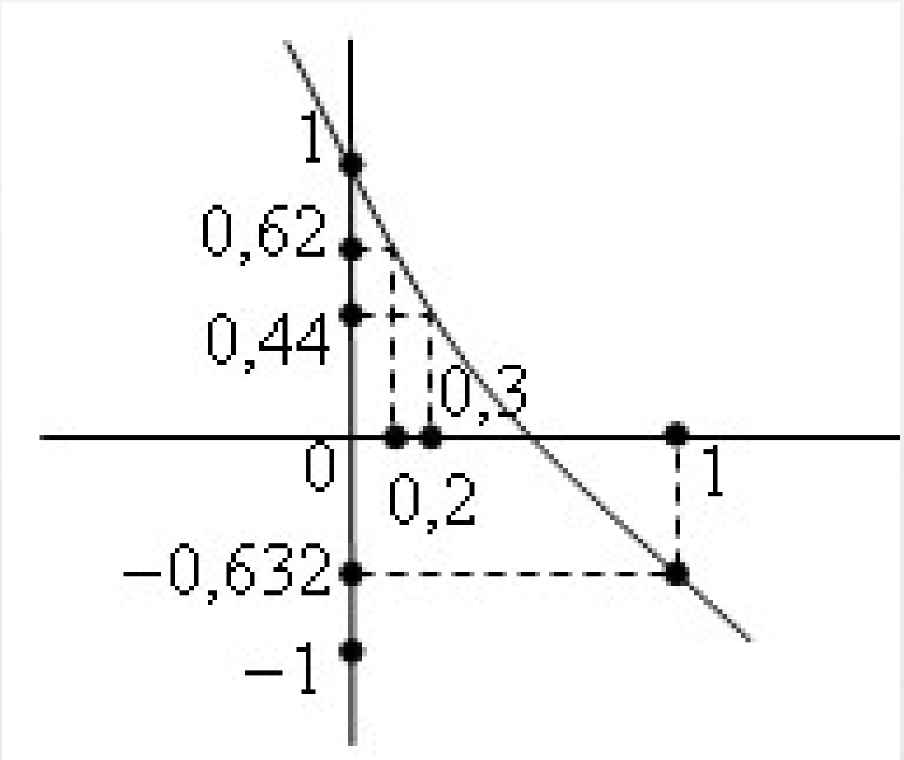
Akar-akar: $x^2 - 4x = 0$

$$x(x-4) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ atau } x_2 = 4$$

Pendahuluan

- Carilah akar dari suatu $f(x) = e^{-x} - x$? Dengan analitis sulit
- diselesaikan dengan metode grafik, dengan cara buat tabel dan plot:



x	f(x)
0	1
0.2	0.6187
0.3	0.4408
⋮	⋮
1	-0.632

Mencari Akar Persamaan Dengan Metode Numeris

- Metode Tertutup
  - Metode Grafik
  - Metode Bisection (Metode bagi dua)
  - Metode Regula falsi (Interpolasi Linier)

- Metode Terbuka
  - Metode Secant
  - Metode Newton Raphson

Metode Tertutup

Metode ini sering disebut metode terkurung/tertutup Proses pencarian akar dimulai dengan dua tebakan awal sebagai batas bawah dan batas atas yang mengapit akar .

Dalam metode ini, grafik fungsi digambar secara kasar selanjutnya dilakukan pendekatan ke titik potong pada sumbu x.

Metode Grafik

- Metode paling sederhana untuk mendekati akar suatu fungsi f(x), dilakukan dengan membuat grafik secara kasar dari fungsi tersebut dan kemudian mengamati berapa nilai x yang menyebabkan f(x) berharga 0.

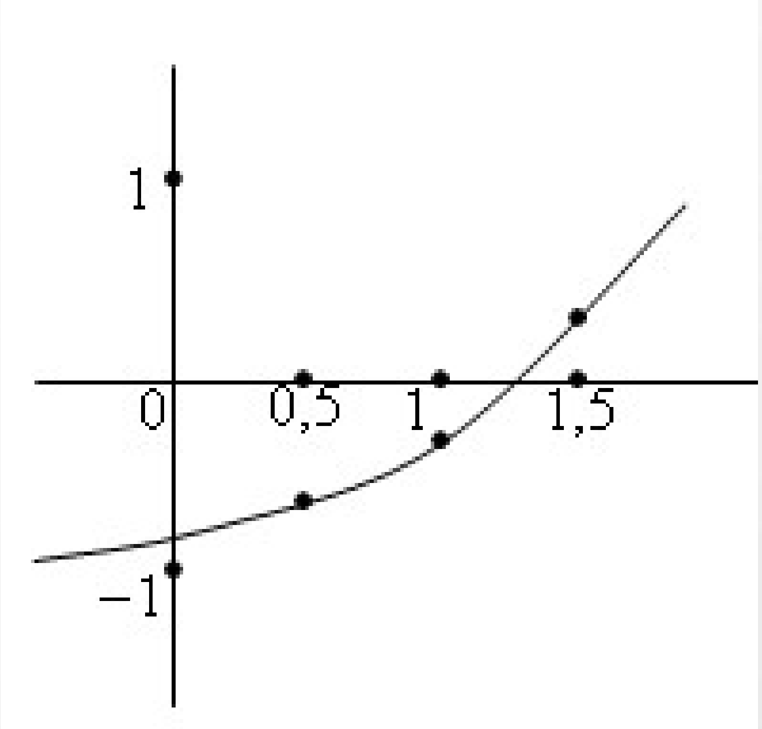
- Pendekatan dilakukan dengan selang atau delta yang melingkupi/mengapit perpotongan sumbu x. Jika selang ditentukan semakin kecil dari setiap perubahan nilai x, maka akan menghasilkan nilai yang semakin teliti.

Contoh Metode Grafik

- Carilah suatu akar dari $f(x) = e^x - 2 - x^2$
  - tebakan awal $x_0 = 0.5$ dan $x_1 = 1.5$

    dengan selang $(\Delta x) = 0.5$

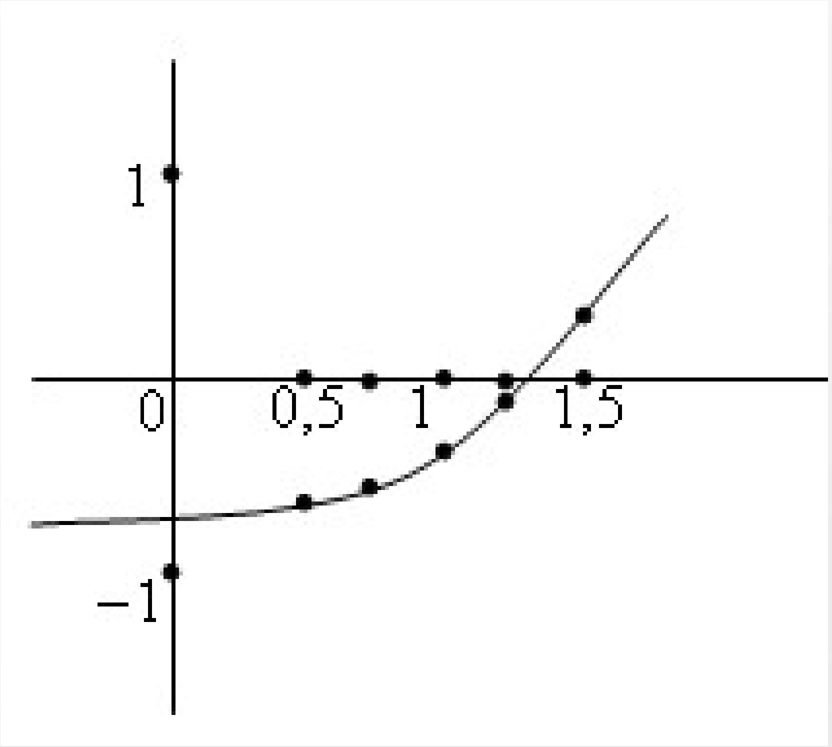
x	f(x)
0.5	– 0.60128
1	– 0.28172
1.5	0.23169



Contoh Metode Grafik

- tebakan awal x_0 = 0.5 dan x_1 = 1.5
  dengan selang (Δx) = 0.25

x	f(x)
0.5	– 0.60128
0.75	– 0.4455
1	– 0.28172
1.25	– 0.07216
1.5	0.23169



Contoh Metode Grafik

- tebakan awal $x_0 = 0.5$ dan $x_1 = 1.5$ dengan selangn $(\Delta x) = 0.2$

x	f(x)
0.5	– 0.60128
0.7	– 0.47625
0.9	– 0.3504
1.1	– 0.20583
1.3	– 0.02070
1.5	0.23169

- Dengan selang $\Delta x = 0.25$. diperoleh pendekatan akar $x = 1.25$.
- Dengan selang $\Delta x = 0.2$. diperoleh pendekatan akar $x = 1.3$. (lebih teliti karena menghasilkan f(x) yang nilainya lebih dekat dengan 0)

Metode Bisection (Bagi Dua)

- Digunakan untuk menentukan salah satu akar dari fungsi f(x).
- Syarat: fungsi f(x) real (bukan kompleks) dan kontinyu dalam interval $x_i \rightarrow x_u$.

  dimana $f(x_i)$ dan $f(x_u)$ berbeda tanda polaritas sehingga $f(x_i).f(x_u) < 0$
- Dasar dari metode ini adalah **metode carian bertahap.**

Metode Carian bertahap

- Dimulai dengan menentukan sebuah interval dimana fungsi tersebut bernilai + dan - (bertukar tanda).
- Membagi interval tersebut menjadi sejumlah subinterval (misal 2 untuk bisection) agar lebih teliti.
- Setiap subinterval dicari untuk menempatkan perubahan tanda.

Proses tersebut diulangi dengan subinterval yang semakin lama semakin kecil hingga dicapai suatu proses konvergensi.

Algoritma Metode Bisection

1. Ambil harga x_i (harga x yang terendah) dan x_u (harga x yang tertinggi), agar fungsi berubah tanda sepanjang interval tersebut sehingga $f(x_i).f(x_u) < 0$
2. Tentukan tebakan awal akar, misal x_r ditentukan dengan:

$$x_r = \frac{x_i + x_u}{2}$$

Algoritma Metode Bisection

3. Evaluasi harga x_r untuk menentukan subinterval yang memuat harga akar dengan cara:
   - Jika $f(x_i).f(x_r) < 0$, akar terletak pada subinterval pertama, maka x_u baru = x_r.
   - Jika $f(x_i).f(x_r) > 0$, akar terletak pada subinterval kedua, maka x_i baru = x_r.
   - Jika $f(x_i).f(x_r) = 0$, maka proses komputasi berhenti dan akarnya = x_r.

Algoritma Metode Bisection

4. Buat taksiran akar baru x_r dengan

$$x_r = \frac{x_i + x_u}{2}$$

5. Uji, apakah taksiran baru cukup akurat dengan kebutuhan? ($|\varepsilon_a| \le |\varepsilon_s|$).

   Jika ya hentikan komputasi, jika tidak kembali lagi ke evaluasi (step 3).

ε_a Error komputasi sekarang,
ε_s Error toleransi yang ditentukan.

Contoh Metode Bisection

- Diberikan fungsi $f(x) = e^x - 2 - x^2$,

  carilah akarnya dengan metode bisection, gunakan $x_i = 0.5$; $x_u = 1.5$; $\varepsilon_s = 1\%$

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

- Iterasi 1:

1. $x_i = 0.5$; $x_u = 1.5$; $f(x_i) = -0.60128$; $f(x_u) = 0.23169$
2. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{0,5 + 1,5}{2} = 1$$
3. $f(x_r) = -0.28172$

   $f(x_i).f(x_r) = (-0.60128).(-0.28172) > 0$

   maka x_i baru = 1
4. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1 + 1,5}{2} = 1,25$$
5. $$\left|\varepsilon_a\right| = \left|\frac{1,25 - 1}{1,25}\right| * 100\% = 20\%$$

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

- Iterasi 2:

3. $f(x_r) = f(1.25) = -0.07216$

   $f(x_i).f(x_r) = (-0.28172).(-0.07216) > 0$

   maka x_i baru = 1.25

4. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1,25 + 1,5}{2} = 1,375$$

5. $$|\varepsilon_a| = \left|\frac{1,375 - 1,25}{1,375}\right| * 100\% = 9,1\%$$

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

- Iterasi 3:

  3. $f(x_r) = f(1.375) = 0.06445$

     $f(x_i).f(x_r) = (-0.07216).(0.06445) < 0$

     maka x_u baru = 1.375

  4. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1,25 + 1,375}{2} = 1,3125$$

  5. $$|\varepsilon_a| = \left|\frac{1,3125 - 1,375}{1,3125}\right| * 100\% = 4,76\%$$

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

- iterasi 4:

  3. $f(x_r) = f(1.3125) = -0.0072$

     $f(x_i).f(x_r) = (-0.07216).(-0.0072) > 0$

     maka x_i baru = 1.3125

  4. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1{,}3125 + 1{,}375}{2} = 1{,}34375$$

  5. $$\left|\varepsilon_a\right| = \left|\frac{1{,}34375 - 1{,}3125}{1{,}34375}\right| * 100\% = 2{,}3\%$$

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

- Iterasi 5:

3. $f(x_r) = f(1.3125) = -0.0072$

   $f(x_i).f(x_r) = (-0.0072).(0.0277) > 0$

   maka x_i baru = 1.34375

4. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1,3125 + 1,34375}{2} = 1,328125$$

5. $$|\varepsilon_a| = \left|\frac{1,328125 - 1,34375}{1,328125}\right| * 100\% = 1,176\%$$

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

- Iterasi 6:

  3. $f(x_r) = f(1.328125) = 0.010$

     $f(x_i).f(x_r) = (-0.0072).(0.010) < 0$

     maka x_u baru = 1.328125

  4. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1{,}3125 + 1{,}328125}{2} = 1{,}3203$$

  5. $$|\varepsilon_a| = \left|\frac{1{,}3203 - 1{,}328125}{1{,}3203}\right| * 100\% = 0{,}59\%$$

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

Iterasi	x_r	$\lvert\varepsilon_a\rvert$ %
1	1	–
2	1.25	20
3	1.375	9.1
4	1.3125	4.76
5	1.34375	2.3
6	1.328125	1.176
7	1.3203	0.59

Jika ε_s = 1 %, maka akarnya adalah

x = 1.3203

Metode Bisection

- Kelebihan Metode Bisection
  - metode bisection sangat sederhana
  - selalu konvergen

- Kelemahan Metode Bisection
  - harus menebak dua titik
  - kekonvergenan relatif lambat
  - jika pada selang diamati terdapat akar yang sama (double root) atau closely spaced roots, metode bagi dua memberikan hasil yang tidak akurat

Metode Regula falsi

- Yang membedakan antara metode Regulafalsi dan Bisection adalah dalam menentukan besarnya x_r.

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_i - x_u)}{f(x_i) - f(x_u)}$$

- Penentuan pergantian besarnya subinterval tetap ditentukan berdasarkan $f(x_i) \cdot f(x_r)$.

Contoh Metode Regulafalsi

- Carilah salah satu akar suatu fungsi $f(x) = e^x - 2 - x^2$, dimana $x_i = 0.5$; $x_u = 1.5$; $\varepsilon_s = 1\%$!

  dengan metode Regulafalsi

Contoh Metode Regulafalsi

- iterasi 1

1. x_i = 0.5; xu = 1.5;
   $f(x_i) = f(0.5) = -0.60128$; $f(x_u) = f(1.5) = 0.23169$

2. $$x_r = (1,5) - \frac{(0,23169)(0,5-1,5)}{(-0,60128)-(0,23169)} = 1,2219$$

3. $f(x_r) = f(1.2219) = -0.0994$
   $f(x_i).f(x_r) = (-0.60128).(-0.09941) > 0$
   maka x_i baru = 1.2219; $f(x_i) = -0.09941$

4. $$x_r = (1,5) - \frac{(0,23169)(1,2219-1,5)}{(-0,09941)-(0,23169)} = 1,3054$$

5. $$|\varepsilon_a| = \left|\frac{1,3054-1,2219}{1,3054}\right| * 100\% = 6,397\%$$

Contoh Metode Regulafalsi

- iterasi 2:

3. $f(x_r) = f(1.3054) = -0.014905$

   $f(x_i).f(x_r) = (-0.09941).(-0.014905) > 0$

   maka x_i baru = 1.3054; $f(x_i) = -0.014905$

4. $$x_r = (1{,}5) - \frac{(0{,}23169)(1{,}3054 - 1{,}5)}{(-0{,}014905) - (0{,}23169)} = 1{,}31716$$

5. $$|\varepsilon_a| = \left|\frac{1{,}31716 - 1{,}3054}{1{,}31716}\right| * 100\% = 0{,}8928\%$$

Contoh Metode Regulafalsi

Iterasi	x_r	ε_a %
1	1.2219	-
2	1.3054	6.397
3	1.31716	0.8928

Regulafalsi lebih cepat konvergen, daripada metode Bisection, tetapi belum tentu teliti. Hal ini diamati dari ε_a kedua metode.

Pada metode Bisection $x_r = 1.3203$; $\varepsilon_a = 0.59$,

Pada metode Regulafalsi $x_r = 1.31716$; $\varepsilon_a = 0.8928$

(ε_a Bisection < ε_a Regulafalsi)

Metode Terbuka

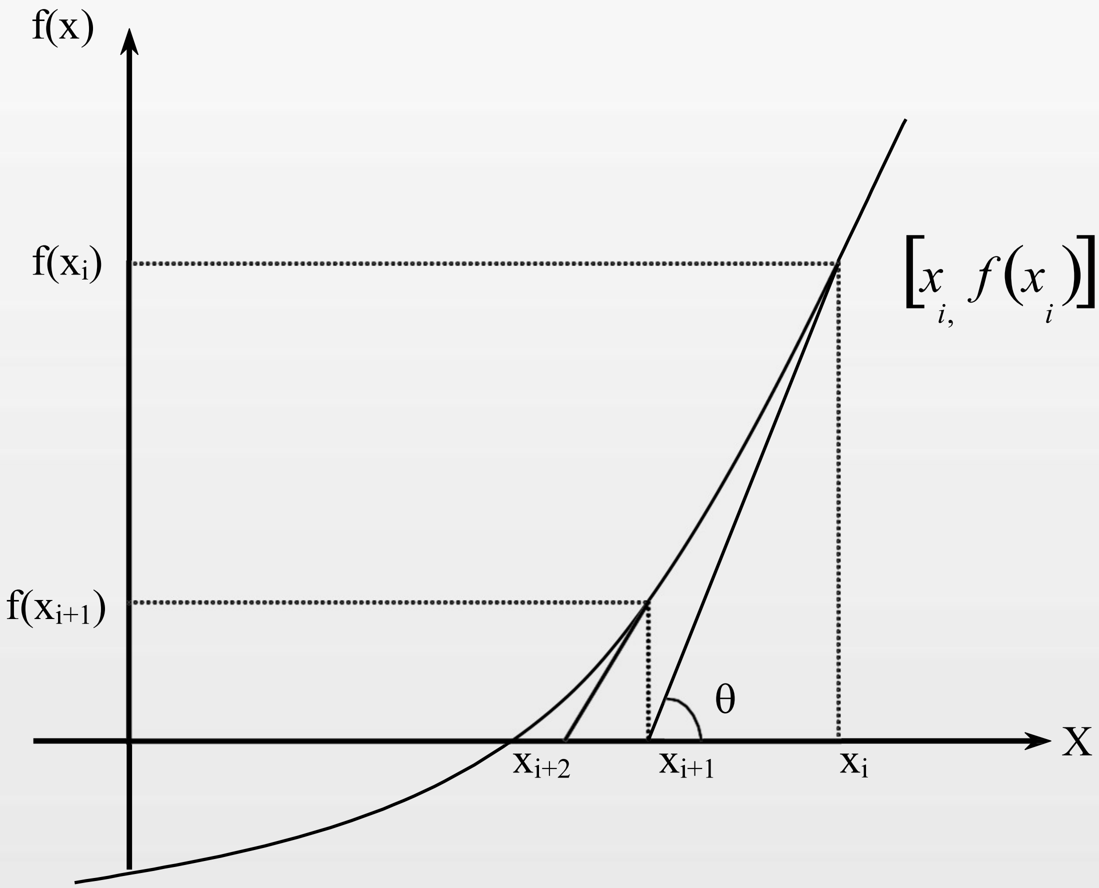
- Hanya butuh sebuah harga estimasi awal dari x atau 2 harga x tetapi tidak perlu harus mengapit akar.
- Jadi tidak seperti metode tertutup yang memerlukan 2 harga awal dan harus dalam posisi mengapit akar.

Metode Newton-Raphson

1. Tentukan harga awal x_i.
2. Garis singgung terhadap $f(x_i)$ akan diekstrapolasikan ke bawah pada sumbu x untuk memberikan sebuah taksiran akar pada x_{i+1}, sehingga x_{i+1} dirumuskan:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

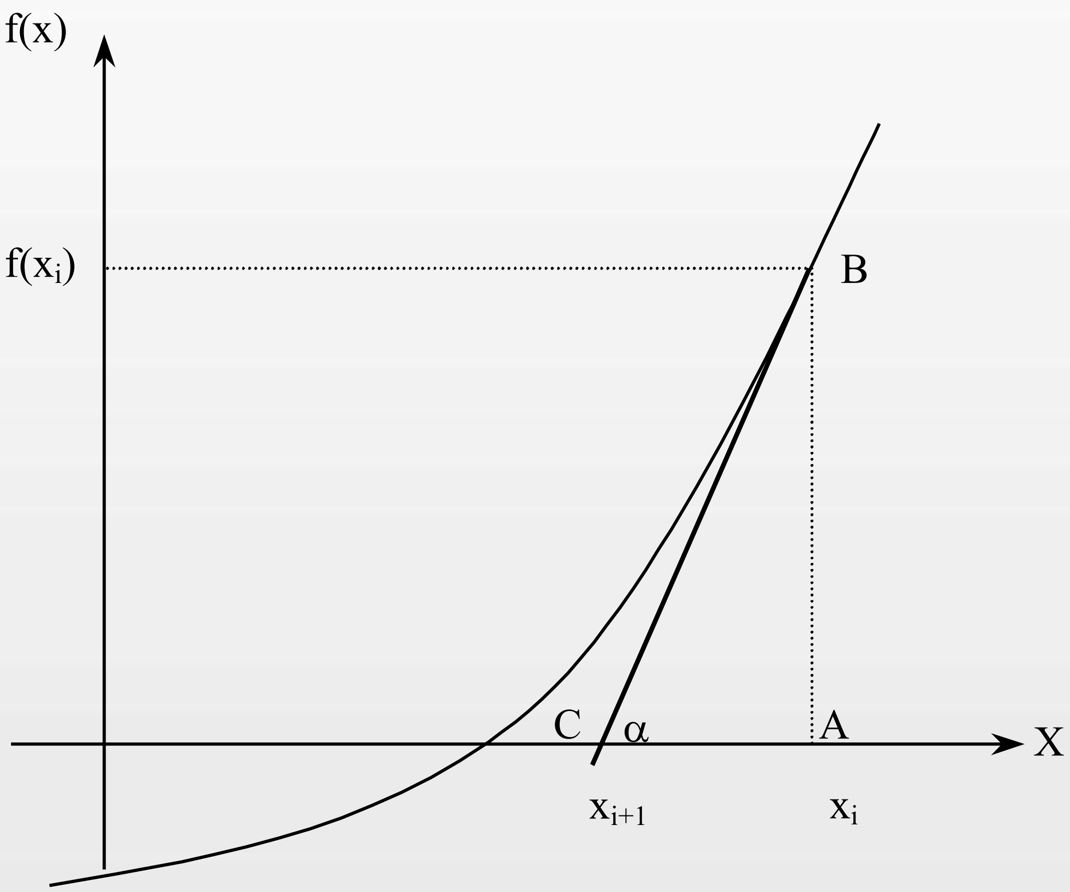
Newton-Raphson Method



$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Figure 1 Geometrical illustration of the Newton-Raphson method.

Derivation



$$\tan(\alpha) = \frac{AB}{AC}$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Figure 2 Derivation of the Newton-Raphson method.

Kelemahan Newton -Raphson

- Harus menentukan turunan dari f(x)
- Karena kita menentukan titik awal hanya 1, maka sering didapatkan/ditemukan akar yang divergen. Hal ini disebabkan karena
  - Dalam menentukan x_i yang sembarang ternyata dekat dengan titik belok sehingga $f(x_i)$ dekat dengan 0, akibatnya

    menjadi tidak terhingga/tak tentu sehingga x_{i+1} semakin menjauhi akar yang sebenarnya

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Kelemahan Newton -Raphson

- Kalau x_i dekat dengan titik ekstrim/puncak maka turunannya dekat dengan 0, akibatnya x_{i+1} akan semakin menjauhi akar sebenarnya
- Kadang–kadang fungsi tersebut tidak punya akar tetapi ada penentuan harga awal, sehingga sampai kapanpun tidak akan pernah ditemukan akarnya.

Perlu dilakukan

- Sebelum titik awal ditentukan, terlebih dahulu dilakukan sketsa grafik terlebih dahulu.
  - Konvergen $\rightarrow$ kesalahan semakin lama semakin kecil
  - Divergen $\rightarrow$ kesalahan semakin lama semakin besar

Contoh Metode Newton-Raphson

- Hitung salah satu akar dari $f(x) = e^x - 2 - x^2$ pada titik awal 1,5; $\varepsilon_s = 1$ %

Contoh Metode Newton-Raphson

- iterasi 1

1. $x_i = 1.5$; $f(x_i) = 0,23169$

   $f'(x_i) = e^x - 2x \rightarrow f'(1.5) = 1.4817$

2.

3. $$x_{i+1} = 1,5 - \frac{0,23169}{1,4817} = 1,3436$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{1,3436 - 1,5}{1,3436} \right| * 100\% = 11,64\%$$

Contoh Metode Newton-Raphson

- iterasi 2

1. x_i = 1.3436 ; $f(x_i)$ = 0,027556

   $f'(x_i) = e^x - 2x \rightarrow f'(1.3436) = 1.145617$

2.

3. $$x_{i+1} = 1,3436 - \frac{0,027556}{1,145617} = 1,319547$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{1,319547 - 1,3436}{1,319547} \right| * 100\% = 1,8228\%$$

Contoh Metode Newton-Raphson

- iterasi 3

1. $x_i = 1.319547$; $f(x_i) = 0.0085217$

   $f'(x_i) = e^x - 2x \rightarrow f'(1.319547) = 1.102632$

2.

3. $$x_{i+1} = 1{,}319547 - \frac{0{,}0085217}{1{,}102632} = 1{,}319074$$

   $$\varepsilon_a = \left| \frac{1{,}319074 - 1{,}319547}{1{,}319074} \right| * 100\% = 0{,}036\%$$

Contoh Metode Newton-Raphson

Iterasi	$\mathbf{x_{i+1}}$	ε_a **%**
1	1.3436	11.64
2	1.319547	1.8228
3	1,319074	0,036

Jadi akar dari $f(x) = e^x - 2 - x^2$ adalah $x = 1,319074$