



METODE NUMERIK

E3024022

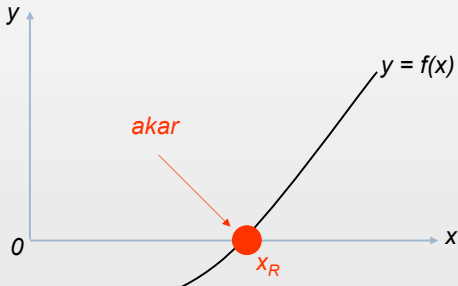
Mencari Akar Persamaan

1



Pendahuluan

- ▶ Akar-akar suatu persamaan dari suatu fungsi $f(x)$ sebenarnya adalah harga x yang membuat $f(x) = 0$.
- ▶ Jadi untuk mencari akar-akar suatu persamaan adalah dengan menyelesaikan persamaan

$$f(x) = 0$$


2



Pendahuluan

Pada mulanya penyelesaian suatu akar persamaan menggunakan metode analitis.

$$f(x) = x^2 - 4x$$

$$\text{Akar-akar: } x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

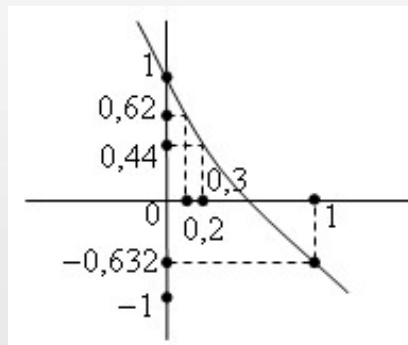
$$x_1 = 0 \text{ atau } x_2 = 4$$

3



Pendahuluan

- ▶ Carilah akar dari suatu $f(x) = e^{-x} - x$?
Dengan analitis sulit
- ▶ diselesaikan dengan metode grafik,
dengan cara buat tabel dan plot:



x	f(x)
0	1
0.2	0.6187
0.3	0.4408
0.37	0
0.632	-0.632
1	-0.632

4



Mencari Akar Persamaan Dengan Metode Numeris

- ▶ Metode Tertutup
 - ▶ Metode Grafik
 - ▶ Metode Bisection (Metode bagi dua)
 - ▶ Metode Regula falsi (Interpolasi Linier)
- ▶ Metode Terbuka
 - ▶ Metode Secant
 - ▶ Metode Newton Raphson



5



Metode Tertutup

Metode ini sering disebut metode terkurung/tertutup
Proses pencarian akar dimulai dengan dua tebakan awal sebagai batas bawah dan batas atas yang mengapit akar .

Dalam metode ini, grafik fungsi digambar secara kasar selanjutnya dilakukan pendekatan ke titik potong pada sumbu x.



6



Metode Grafik

- ▶ Metode paling sederhana untuk mendekati akar suatu fungsi $f(x)$, dilakukan dengan membuat grafik secara kasar dari fungsi tersebut dan kemudian mengamati berapa nilai x yang menyebabkan $f(x)$ berharga 0.
- ▶ Pendekatan dilakukan dengan selang atau delta yang melingkupi/mengapit perpotongan sumbu x . Jika selang ditentukan semakin kecil dari setiap perubahan nilai x , maka akan menghasilkan nilai yang semakin teliti.

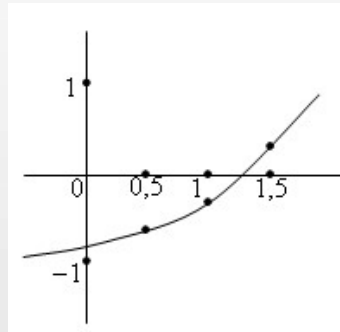
7



Contoh Metode Grafik

- ▶ Carilah suatu akar dari $f(x) = e^x - 2 - x^2$
 - ▶ tebakan awal $x_0 = 0.5$ dan $x_1 = 1.5$ dengan selang $(\Delta x) = 0.5$

x	$f(x)$
0.5	-0.60128
1	-0.28172
1.5	0.23169

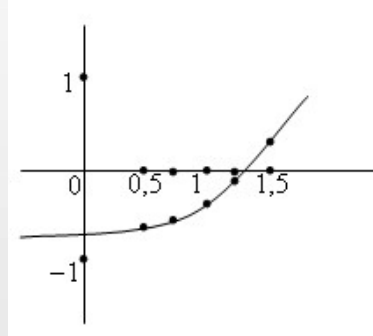


8

Contoh Metode Grafik

- tebakan awal $x_0 = 0.5$ dan $x_1 = 1.5$
dengan selang $(\Delta x) = 0.25$

x	f(x)
0.5	-0.60128
0.75	-0.4455
1	-0.28172
1.25	-0.07216
1.5	0.23169



9

Contoh Metode Grafik

- tebakan awal $x_0 = 0.5$ dan $x_1 = 1.5$
dengan selang $(\Delta x) = 0.2$

x	f(x)
0.5	-0.60128
0.7	-0.47625
0.9	-0.3504
1.1	-0.20583
1.3	-0.02070
1.5	0.23169

– Dengan selang $\Delta x = 0.25$. diperoleh pendekatan akar $x = 1.25$.

– Dengan selang $\Delta x = 0.2$. diperoleh pendekatan akar $x = 1.3$. (lebih teliti karena menghasilkan $f(x)$ yang nilainya lebih dekat dengan 0)

10



Metode Bisection (Bagi Dua)

- ▶ Digunakan untuk menentukan salah satu akar dari fungsi $f(x)$.
- ▶ Syarat: fungsi $f(x)$ real (bukan kompleks) dan kontinyu dalam interval $x_i \rightarrow x_u$.
dimana $f(x_i)$ dan $f(x_u)$ berbeda tanda polaritas sehingga $f(x_i) \cdot f(x_u) < 0$
- ▶ Dasar dari metode ini adalah **metode carian bertahap**.

11



Metode Carian bertahap

- ▶ Dimulai dengan menentukan sebuah interval dimana fungsi tersebut bernilai + dan - (bertukar tanda).
- ▶ Membagi interval tersebut menjadi sejumlah subinterval (misal 2 untuk bisection) agar lebih teliti.
- ▶ Setiap subinterval dicari untuk menempatkan perubahan tanda.

Proses tersebut diulangi dengan subinterval yang semakin lama semakin kecil hingga dicapai suatu proses konvergensi.

12



Algoritma Metode Bisection

1. Ambil harga x_i (harga x yang terendah) dan x_u (harga x yang tertinggi), agar fungsi berubah tanda sepanjang interval tersebut sehingga $f(x_i).f(x_u) < 0$
2. Tentukan tebakan awal akar, misal x_r ditentukan dengan:

$$x_r = \frac{x_i + x_u}{2}$$

13



Algoritma Metode Bisection

3. Evaluasi harga x_r untuk menentukan subinterval yang memuat harga akar dengan cara:
 - ▶ Jika $f(x_i).f(x_r) < 0$, akar terletak pada subinterval pertama, maka x_u baru = x_r .
 - ▶ Jika $f(x_i).f(x_r) > 0$, akar terletak pada subinterval kedua, maka x_i baru = x_r .
 - ▶ Jika $f(x_i).f(x_r) = 0$, maka proses komputasi berhenti dan akarnya = x_r .

14



Algoritma Metode Bisection

4. Buat taksiran akar baru x_r dengan

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

5. Uji, apakah taksiran baru cukup akurat dengan kebutuhan? ($|\epsilon_a| \leq |\epsilon_s|$).
Jika ya hentikan komputasi, jika tidak kembali lagi ke evaluasi (step 3).

ϵ_a Error komputasi sekarang,
 ϵ_s Error toleransi yang ditentukan.

15



Contoh Metode Bisection

- Diberikan fungsi $f(x) = e^x - 2 - x^2$,
carilah akarnya dengan metode bisection, gunakan
 $x_l = 0.5$; $x_u = 1.5$; $\epsilon_s = 1\%$

16

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

► Iterasi 1:

$$1. x_i = 0.5; x_u = 1.5; f(x_i) = -0.60128; f(x_u) = 0.23169$$

2.

$$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{0.5 + 1.5}{2} = 1$$

$$3. f(x_r) = -0.28172$$

$$f(x_i).f(x_r) = (-0.60128).(-0.28172) > 0$$

maka x_i baru = 1

$$4. x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

$$5. |\varepsilon_a| = \left| \frac{1.25 - 1}{1.25} \right| * 100\% = 20\%$$

17

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

► Iterasi 2:

$$3. f(x_r) = f(1.25) = -0.07216$$

$$f(x_i).f(x_r) = (-0.28172).(-0.07216) > 0$$

maka x_i baru = 1.25

4.

$$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1.25 + 1.5}{2} = 1.375$$

5.

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{1.375 - 1.25}{1.375} \right| * 100\% = 9.1\%$$

18

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

► Iterasi 3:

$$3. f(x_r) = f(1.375) = 0.06445$$

$$f(x_i).f(x_r) = (-0.07216).(0.06445) < 0$$

maka x_u baru = 1.375

$$4. x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1.25 + 1.375}{2} = 1.3125$$

$$5. |\varepsilon_a| = \left| \frac{1.3125 - 1.375}{1.3125} \right| * 100\% = 4.76\%$$

19

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

► iterasi 4:

$$3. f(x_r) = f(1.3125) = -0.0072$$

$$f(x_i).f(x_r) = (-0.07216).(-0.0072) > 0$$

maka x_i baru = 1.3125

$$4. x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1.3125 + 1.375}{2} = 1.34375$$

$$5. |\varepsilon_a| = \left| \frac{1.34375 - 1.3125}{1.34375} \right| * 100\% = 2.3\%$$

20

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

► Iterasi 5:

$$3. f(x_r) = f(1.3125) = -0.0072$$

$$f(x_i).f(x_r) = (-0.0072).(0.0277) > 0$$

maka x_i baru = 1.34375

$$4. x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1,3125 + 1,34375}{2} = 1,328125$$

$$5. |\varepsilon_a| = \left| \frac{1,328125 - 1,34375}{1,328125} \right| * 100\% = 1,176\%$$

21

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

► Iterasi 6:

$$3. f(x_r) = f(1.328125) = 0.010$$

$$f(x_i).f(x_r) = (-0.0072).(0.010) < 0$$

maka x_u baru = 1.328125

$$4. x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1,3125 + 1,328125}{2} = 1,3203$$

$$5. |\varepsilon_a| = \left| \frac{1,3203 - 1,328125}{1,3203} \right| * 100\% = 0,59\%$$

22

Contoh Metode Bisection (lanjt.)

Iterasi	x_r	$ \varepsilon_a \%$
1	1	—
2	1.25	20
3	1.375	9.1
4	1.3125	4.76
5	1.34375	2.3
6	1.328125	1.176
7	1.3203	0.59

Jika $\varepsilon_s = 1 \%$, maka
akarnya adalah $x =$
1.3203

23



Metode Bisection

- ▶ Kelebihan Metode Bisection
 - ▶ metode bisection sangat sederhana
 - ▶ selalu konvergen
- ▶ Kelemahan Metode Bisection
 - ▶ harus menebak dua titik
 - ▶ kekonvergenan relatif lambat
 - ▶ jika pada selang diamati terdapat akar yang sama (double root) atau closely spaced roots, metode bagi dua memberikan hasil yang tidak akurat

24



Metode Regula falsi

- ▶ Yang membedakan antara metode Regula falsi dan Bisection adalah dalam menentukan besarnya x_r .

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_i - x_u)}{f(x_i) - f(x_u)}$$

- ▶ Penentuan pergantian besarnya subinterval tetap ditentukan berdasarkan $f(x_i) \cdot f(x_r)$.

25



Contoh Metode Regula falsi

- ▶ Carilah salah satu akar suatu fungsi $f(x) = e^x - 2 - x^2$, dimana $x_i = 0.5$; $x_u = 1.5$; $\varepsilon_s = 1\%$!
dengan metode Regula falsi

26



Contoh Metode RegulaFalsi

► iterasi 1

$$1. x_i = 0.5; x_u = 1.5;$$

$$f(x_i) = f(0.5) = -0.60128; f(x_u) = f(1.5) = 0.23169$$

$$2. x_r = (1.5) - \frac{(0.23169)(0.5 - 1.5)}{(-0.60128) - (0.23169)} = 1.2219$$

$$3. f(x_r) = f(1.2219) = -0.0994$$

$$f(x_i) \cdot f(x_r) = (-0.60128) \cdot (-0.09941) > 0$$

maka x_i baru = 1.2219; $f(x_i) = -0.09941$

$$4. x_r = (1.5) - \frac{(0.23169)(1.2219 - 1.5)}{(-0.09941) - (0.23169)} = 1.3054$$

$$5. |\varepsilon_a| = \left| \frac{1.3054 - 1.2219}{1.3054} \right| * 100\% = 6.397\%$$

27

Contoh Metode RegulaFalsi

► iterasi 2:

$$3. f(x_r) = f(1.3054) = -0.014905$$

$$f(x_i) \cdot f(x_r) = (-0.09941) \cdot (-0.014905) > 0$$

maka x_i baru = 1.3054; $f(x_i) = -0.014905$

$$4. x_r = (1.5) - \frac{(0.23169)(1.3054 - 1.5)}{(-0.014905) - (0.23169)} = 1.31716$$

$$5. |\varepsilon_a| = \left| \frac{1.31716 - 1.3054}{1.31716} \right| * 100\% = 0.8928\%$$

28

Contoh Metode Regula-falsi

Iterasi	x_r	ε_a %
1	1.2219	-
2	1.3054	6.397
3	1.31716	0.8928

Regula-falsi lebih cepat konvergen, daripada metode Bisection, tetapi belum tentu teliti. Hal ini diamati dari ε_a kedua metode.

Pada metode Bisection $x_r = 1.3203$; $\varepsilon_a = 0.59$,

Pada metode Regula-falsi $x_r = 1.31716$; $\varepsilon_a = 0.8928$

(ε_a Bisection < ε_a Regula-falsi)

29

Metode Terbuka

- ▶ Hanya butuh sebuah harga estimasi awal dari x atau 2 harga x tetapi tidak perlu harus mengapit akar.
- ▶ Jadi tidak seperti metode tertutup yang memerlukan 2 harga awal dan harus dalam posisi mengapit akar.

30

Metode Newton-Raphson

1. Tentukan harga awal x_i .
2. Garis singgung terhadap $f(x_i)$ akan diekstrapolasikan ke bawah pada sumbu x untuk memberikan sebuah taksiran akar pada x_{i+1} , sehingga x_{i+1} dirumuskan:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

31

Newton-Raphson Method

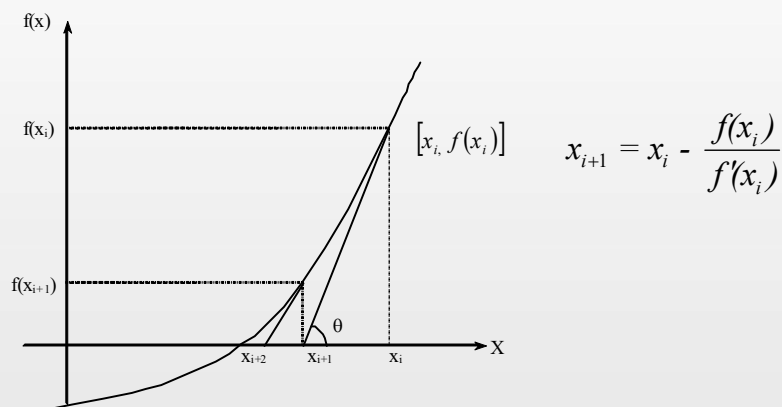


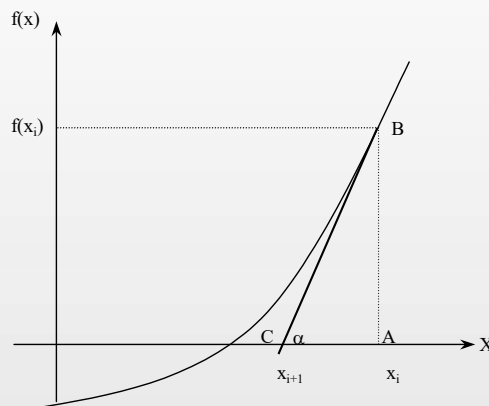
Figure 1 Geometrical illustration of the Newton-Raphson method.

32

<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

32

Derivation



$$\tan(\alpha) = \frac{AB}{AC}$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Figure 2 Derivation of the Newton-Raphson method.

<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

33

Kelemahan Newton -Raphson

- ▶ Harus menentukan turunan dari $f(x)$
- ▶ Karena kita menentukan titik awal hanya 1, maka sering didapatkan/ditemukan akar yang divergen. Hal ini disebabkan karena
- ▶ Dalam menentukan x_i yang sembarang ternyata dekat dengan titik belok sehingga $f(x_i)$ dekat dengan 0, akibatnya

menjadi tidak terhingga/tak tentu sehingga x_{i+1} semakin menjauhi akar yang sebenarnya

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

34

Kelemahan Newton -Raphson

- ▶ Kalau x_i dekat dengan titik ekstrim/puncak maka turunannya dekat dengan 0, akibatnya x_{i+1} akan semakin menjauhi akar sebenarnya
- ▶ Kadang-kadang fungsi tersebut tidak punya akar tetapi ada penentuan harga awal, sehingga sampai kapanpun tidak akan pernah ditemukan akarnya.

35

Perlu dilakukan

- ▶ Sebelum titik awal ditentukan, terlebih dahulu dilakukan sketsa grafik terlebih dahulu.
 - ▶ Konvergen → kesalahan semakin lama semakin kecil
 - ▶ Divergen → kesalahan semakin lama semakin besar

36

Contoh Metode Newton-Raphson

- ▶ Hitung salah satu akar dari $f(x) = e^x - 2 - x^2$ pada titik awal 1,5; $\varepsilon_s = 1\%$

37

Contoh Metode Newton-Raphson

- ▶ iterasi I

$$1. x_i = 1.5 ; f(x_i) = 0,23169$$

$$f'(x_i) = e^x - 2x \rightarrow f'(1.5) = 1.4817$$

2.

$$3. x_{i+1} = 1,5 - \frac{0,23169}{1,4817} = 1,3436$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{1,3436 - 1,5}{1,3436} \right| * 100\% = 11,64\%$$

38

Contoh Metode Newton-Raphson

► iterasi 2

$$1. x_i = 1.3436 ; f(x_i) = 0,027556$$

$$f'(x_i) = e^x - 2x \rightarrow f'(1.3436) = 1.145617$$

2.

$$3. x_{i+1} = 1,3436 - \frac{0,027556}{1,145617} = 1,319547$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{1,319547 - 1,3436}{1,319547} \right| * 100\% = 1,8228\%$$

39

Contoh Metode Newton-Raphson

► iterasi 3

$$1. x_i = 1.319547 ; f(x_i) = 0.0085217$$

$$f'(x_i) = e^x - 2x \rightarrow f'(1.319547) = 1.102632$$

2.

$$3. x_{i+1} = 1,319547 - \frac{0,0085217}{1,102632} = 1,319074$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{1,319074 - 1,319547}{1,319074} \right| * 100\% = 0,036\%$$

40

Contoh Metode Newton-Raphson

Iterasi	x_{i+1}	$\epsilon_a \%$
1	1.3436	11.64
2	1.319547	1.8228
3	1,319074	0,036

Jadi akar dari $f(x) = e^x - 2 - x^2$ adalah $x = 1,319074$

41

Secant Method

42

Algoritma Metode Secant

► Step 1

Tentukan harga awal x_i .

Hitung harga $f(x_i)$ dan $f(x_{i-1})$

43

Step 2

Hitung nilai akar estimasi berikutnya dengan persamaan

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Cari harga mutlak error pendekatan

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100$$

44

44

Step 3

Jika error lebih kecil dari toleransi yang diberikan, maka perhitungan selesai

Jika Tidak kembali ke langkah 2

Jika iterasi sudah mencapai maksimum, perhitung mencari akar dihentikan