

Polinom Newton & Polinom Newton-Gregory

Metode Numerik



Polinom Newton

Polinom Lagrange kurang disukai dalam praktek karena alasan berikut:

1. Jumlah komputasi yang dibutuhkan untuk satu kali interpolasi adalah besar. Interpolasi untuk nilai x yang lain memerlukan jumlah komputasi yang sama karena tidak ada bagian komputasi sebelumnya yang dapat digunakan
2. Bila jumlah titik data meningkat atau menurun, hasil komputasi sebelumnya tidak dapat digunakan. Hal ini disebabkan oleh tidak adanya hubungan antara $p_{n-1}(x)$ dan $p_n(x)$ pada polinom Lagrange

- Alternatif: polinom Newton
- Polinom Newton dinyatakan dalam hubungan rekursif sebagai berikut:
 - (i) rekurens: $p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$
 - (ii) basis: $p_0(x) = a_0$
- Jadi, tahapan pembentukan polinom Newton adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= p_0(x) + a_1(x - x_0) \\ &= a_0 + a_1(x - x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_3(x) &= p_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \\
 &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &\quad + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})
 \end{aligned}$$

- Nilai konstanta $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ merupakan nilai selisih-terbagi, (*divided-difference*) dengan nilai masing-masing:

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f[x_1, x_0]$$

$$a_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

...

$$a_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

yang dalam hal ini,

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$\vdots$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]}{x_n - x_0}$$

- Dengan demikian polinom Newton dapat ditulis dalam hubungan rekursif sebagai

(i) rekurens:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

(ii) basis:

$$p_0(x) = f(x_0)$$

- atau dalam bentuk polinom yang lengkap sebagai berikut:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] \\ + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

- Nilai selisih terbagi ini dapat dihitung dengan menggunakan tabel yang disebut tabel selisih-terbagi,
- misalnya tabel selisih-terbagi untuk empat buah titik ($n = 3$) berikut:

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

Keterangan: ST = Selisih-Terbagi

```

function Newton(x:real; n:integer):real;
{Menghitung  $y = p(x)$ , dengan  $p(x)$  adalah polinom Newton derajat  $n$ .
Titik-titik data telah disimpan di dalam larik  $x[0..n]$  dan  $y[0..n]$  }
var
    i, k  : integer;
    ST : array[0..30, 0..30] of real;  {menyimpan tabel selisih terbagi}
    jumlah, suku: real;

begin
    for k:=0 to n do { simpan  $y[k]$  pada kolom 0 dari matriks ST }
        ST[k,0]:=y[k];
    {end for}

    for k:=1 to n do {buat tabel selisih terbagi}
        for i:=0 to n-k do
            ST[i,k]:=(ST[i+1,k-1] - ST[i,k-1])/(x[i+k]-x[i]);
        {end for}
    {end for}

    {hitung  $p(x)$  }
    jumlah:=ST[0,0];
    for i:=1 to n do
        begin
            suku:=ST[0,i];
            for k:=0 to i-1 do
                suku:=suku*(x-x[k])
            {end for}
            jumlah:=jumlah + suku;
        end;
    Newton:=jumlah;
end;

```

- **Contoh:** Hitunglah $f(9.2)$ dari nilai-nilai (x, y) yang diberikan pada tabel di bawah ini dengan polinom Newton derajat 3.

i	x_i	y_i
0	8.0	2.079442
1	9.0	2.197225
2	9.5	2.251292
3	11.0	2.397895

Penyelesaian:

Tabel selisih-terbagi:

i	x_i	y_i	ST-1	ST-2	ST-3
0	8.0	2.079442	0.117783	-0.006433	0.000411
1	9.0	2.197225	0.108134	-0.005200	
2	9.5	2.251292	0.097735		
3	11.0	2.397895			

Contoh cara menghitung nilai selisih-terbagai pada tabel adalah:

$$f(x_2, x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2.251292 - 2.197225}{9.5 - 9.0} = 0.108134$$

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{0.108134 - 0.117783}{9.5 - 8.0} = -0.006433$$

dan seterusnya.

Polinom Newton-nya (dengan $x_0 = 8.0$ sebagai titik data pertama) adalah:

$$f(x) \approx p_3(x) = 2.079442 + 0.117783(x - 8.0) - 0.006433(x - 8.0)(x - 9.0) + 0.000411(x - 8.0)(x - 9.0)(x - 9.5)$$

Taksiran nilai fungsi pada $x = 9.2$ adalah

$$\begin{aligned} f(9.2) \approx p_3(9.2) &= 2.079442 + 0.141340 - 0.001544 - 0.000030 \\ &= 2.219208 \end{aligned}$$

Nilai sejati $f(9.2) = \ln(9.2) = 2.219203$ (7 angka bena).

- **Contoh:** Bentuklah polinom Newton derajat satu, dua, tiga, dan empat yang menghampiri fungsi $f(x) = \cos(x)$ di dalam selang $[0.0, 4.0]$ dan jarak antar titik adalah 1.0. Lalu, taksirlah nilai fungsi di $x = 2.5$ dengan polinom Newton derajat tiga.

Penyelesaian: Dengan jarak antar titik 1.0, maka titik yang digunakan adalah pada $x_0 = 0.0$, $x_1 = 1.0$, $x_2 = 3.0$, $x_3 = 4.0$. Tabel selisih terbaginya adalah:

i	x_i	$f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3	ST-4
0	0.0	1.0000	-0.4597	-0.2484	0.1466	-0.0147
1	1.0	0.5403	-0.9564	0.1913	0.0880	
2	2.0	-0.4161	-0.5739	0.4551		
3	3.0	-0.9900	0.3363			
4	4.0	-0.6536	$f(x_3, x_2)$			

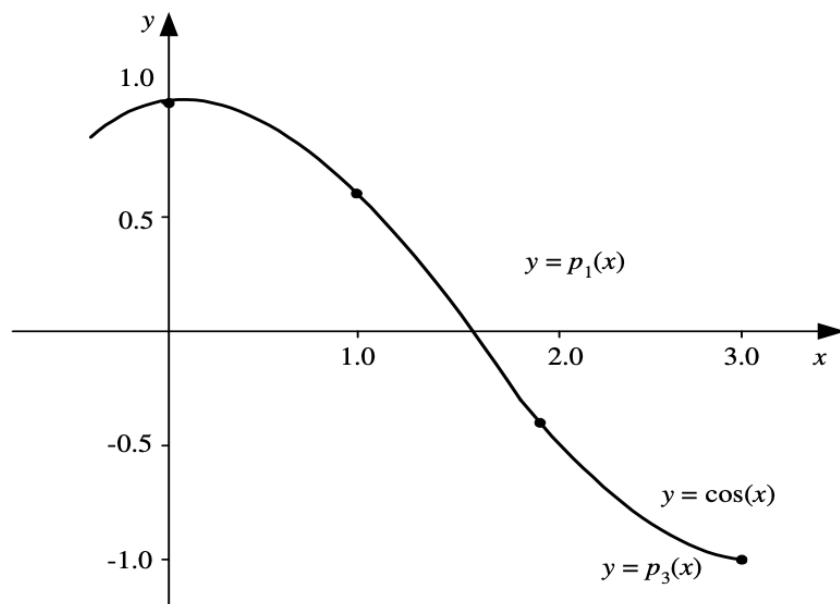
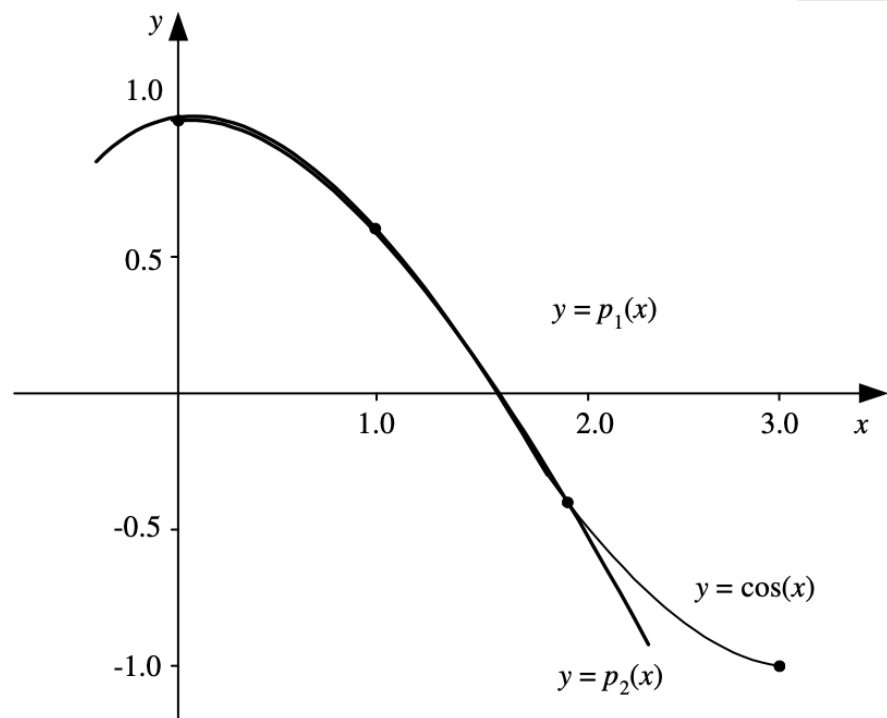
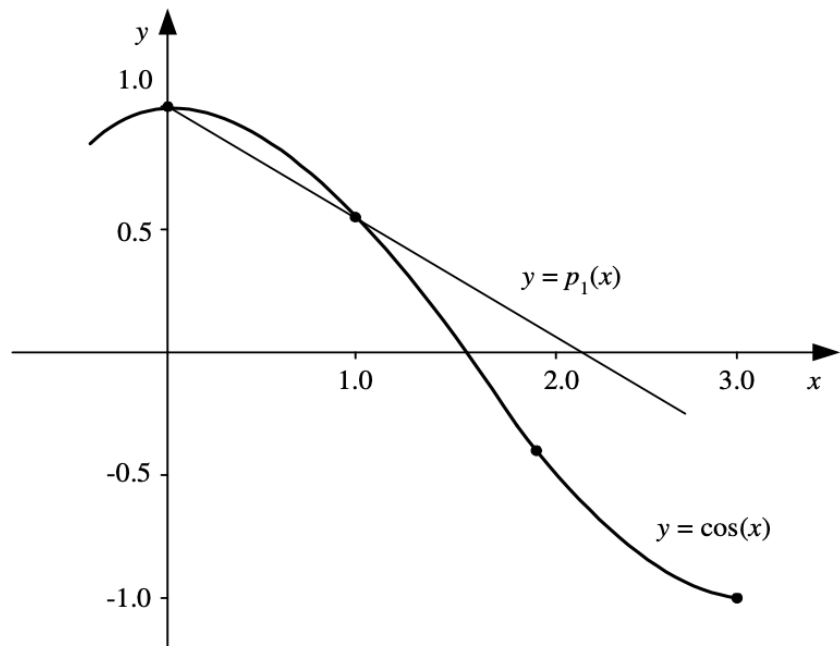
Maka, polinom Newton derajat 1, 2, dan 3 dengan $x_0 = 0.0$ sebagai titik data pertama adalah

$$\cos(x) \approx p_1(x) = 1.0000 - 0.4597(x - 0.0)$$

$$\cos(x) \approx p_2(x) = 1.0000 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0)$$

$$\cos(x) \approx p_3(x) = 1.0000 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) + 0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)$$

$$\begin{aligned} \cos(x) \approx p_4(x) = & 1.0000 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) + \\ & 0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0) \\ & - 0.0147(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)(x - 3.0) \end{aligned}$$



Taksiran nilai fungsi di $x = 2.5$ dengan polinom derajat tiga adalah

$$\begin{aligned}\cos(2.5) \approx p_3(2.5) &= 1.0000 - 0.4597(2.5 - 0.0) - \\ &\quad 0.2484(2.5 - 0.0)(2.5 - 1.0) + \\ &\quad 0.1466(2.5 - 0.0)(2.5 - 1.0)(2.5 - 2.0) \\ &\approx -0.8056\end{aligned}$$

Nilai sejati $f(2.5)$ adalah

$$f(2.5) = \cos(2.5) = -0.8011$$

sehingga solusi hampiran mengandung galat sejati sebesar

$$\varepsilon = -0.8011 - (-0.8056) = -0.0045$$

Kelebihan Polinom Newton

1. Karena polinom Newton dibentuk dengan menambahkan satu suku tunggal dengan polinom derajat yang lebih rendah, maka ini memudahkan perhitungan polinom derajat yang lebih tinggi dalam program yang sama [CHA91]. Karena alasan itu, polinom Newton sering digunakan khususnya pada kasus yang derajat polinomnya tidak diketahui terlebih dahulu.
 2. Penambahan suku-suku polinom secara beruntun dapat dijadikan kriteria untuk menentukan tercapainya titik berhenti, yaitu apakah penambahan suku-suku yang lebih tinggi tidak lagi secara berarti memperbaiki nilai interpolasi, atau malahan menjadi lebih buruk.
 3. Tabel selisih terbagi dapat dipakai berulang-ulang untuk memperkirakan nilai fungsi pada nilai x yang berlainan.
-

Galat Interpolasi Polinom

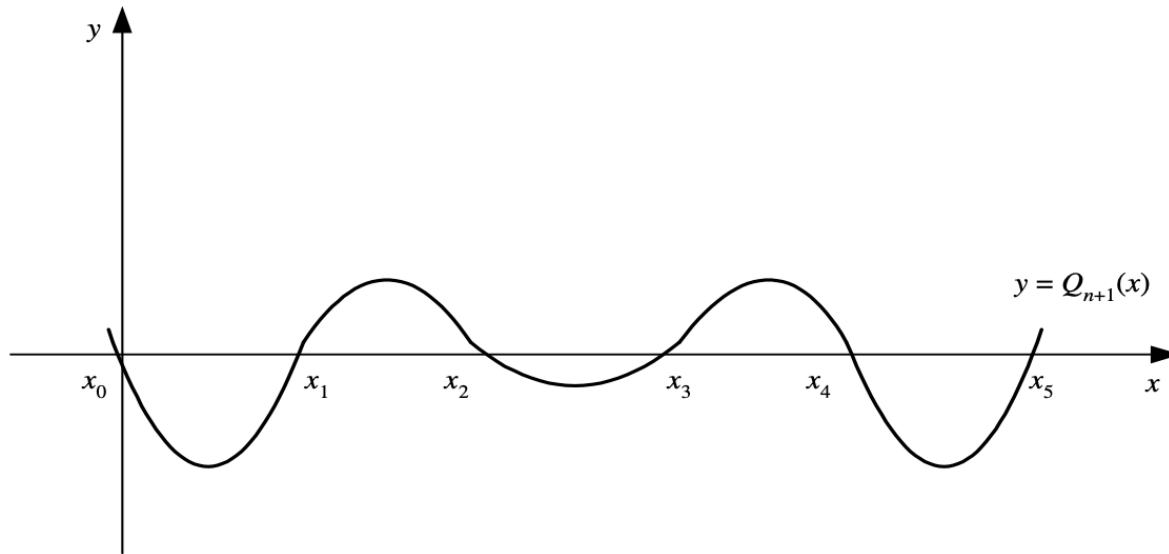
$$E(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$= (x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

- Dari rumus di atas, galat polinom interpolasi, selain bergantung pada nilai x yang diinterpolasi, juga bergantung pada turunan fungsi semula.
- Tinjau Q_{n+1} pada rumus $E(x)$

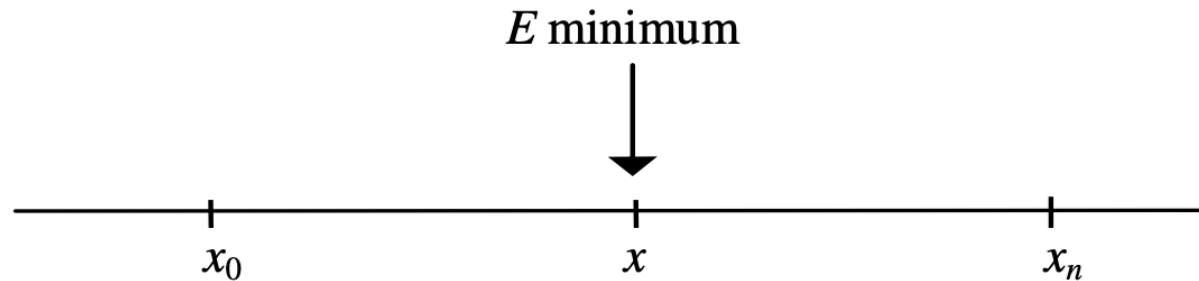
$$Q_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

- Misalkan $x_0, x_1, \dots, x_n$ berjarak sama. Grafik fungsi Q untuk enam titik yang berjarak sama ditunjukkan pada Gambar:



- Berdasarkan $Q_6(x)$ yang berosilasi pada Gambar di atas terlihat bahwa:
 - di titik-titik data x_i , nilai $Q_6(x_i) = 0$, sehingga galat interpolasi $E(x_i)=0$
 - di titik tengah selang, nilai $Q_6(x)$ minimum, sehingga $E(x)$ juga minimum
 - di titik-titik sekitar ujung selang, $Q_6(x)$ besar, sehingga $E(x)$ juga besar
 - bila ukuran selang $[x_0, x_6]$ semakin besar, amplitudo osilasi meningkat dengan cepat.

- ***Kesimpulan:*** Galat interpolasi minimum terjadi untuk nilai x di pertengahan selang.



Ingatlah kalimat ini:

Untuk mendapatkan galat interpolasi yang minimum, pilihlah selang $[x_0, x_n]$ sedemikian sehingga x terletak di tengah selang tersebut

Misalkan kepada kita diberikan titik-titik data seperti ini:

x	$f(x)$
0.025	2.831
0.050	3.246
0.075	4.721
0.100	5.210
0.125	6.310
0.150	7.120
0.175	8.512
0.200	9.760
0.225	10.310

Bila anda diminta menghitung $f(0.160)$, maka selang yang digunakan agar galat interpolasi $f(0.160)$ kecil adalah

$[0.150, 0.175]$ → untuk polinom derajat satu

atau

$[0.125, 0.200]$ → untuk polinom derajat tiga

atau

$[0.100, 0.225]$ → untuk polinom derajat lima

Polinom Newton-Gregory

- Polinom Newton-Gregory merupakan kasus khusus dari polinom Newton untuk titik-titik yang berjarak sama.
 - Untuk titik-titik yang berjarak sama, rumus polinom Newton menjadi lebih sederhana. Selain itu, tabel selisih-terbaginya pun lebih mudah dibentuk. Di sini kita menamakan tabel tersebut sebagai **tabel selisih** saja.
 - Ada dua macam tabel selisih, yaitu tabel selisih maju (*forward difference*) dan tabel selisih mundur (*backward difference*).
 - Karena itu, ada dua macam polinom Newton-Gregory, yaitu polinom **Newton-Gregory maju** dan polinom **Newton-Gregory mundur**.
-

Polinom Newton-Gregory Maju

- Misalkan tabel selisih maju yang dibentuk dari lima buah titik:

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$		
x_3	f_3	Δf_3			
x_4	f_4				

- Keterangan:

$$f_0 = f(x_0) = y_0$$

$$f_1 = f(x_1) = y_1$$

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\Delta f_1 = f_2 - f_1$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$$

$$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$$

$$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$$

$$\Delta^3 f_1 = \Delta^2 f_2 - \Delta^2 f_1$$

Bentuk umum:

$$\Delta^{n+1} f_p = \Delta^n f_{p+1} - \Delta^n f_p, \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Penurunan Rumus Polinom Newton-Gregory Maju

$$\begin{aligned}f[x_1, x_0] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\&= \frac{\Delta f(x_0)}{h} \\&= \frac{\Delta f_0}{1!h}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}f[x_1, x_2, x_0] &= \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} \\&= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\&= \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{h} \\&= \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}\end{aligned}$$

Bentuk umum:

$$f[x_n, \dots, x_1, x_0] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n} = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$$

Dengan demikian polinom Newton untuk data berjarak sama dapat ditulis sebagai :

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0] + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

$$= f_0 + (x - x_0) \frac{\Delta f_0}{1!h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2} + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$$

Persamaan ini dinamakan polinom Newton-Gregory maju.
Persamaan di atas dapat juga ditulis sebagai relasi rekursif:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$$

Jika titik-titik berjarak sama dinyatakan sebagai

$$x_i = x_0 + ih \quad , i = 0, 1, 2, \dots, n$$

dan nilai x yang diinterpolasikan adalah

$$x = x_0 + sh \quad , s \in R$$

maka, persamaan di atas dapat juga ditulis dalam parameter s sebagai

$$p_n(x) = f_0 + \frac{sh}{1!h} \Delta f_0 + \frac{s(s-1)h^2}{2!h^2} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)h^n}{n!h^n} \Delta^n f_0$$

yang menghasilkan

$$p_n(x) = f_0 + \frac{s}{1!} \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

atau dalam bentuk relasi rekursif,

$$(i) \text{ rekurens: } p_n(x) = p_{n-1}(x) + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

$$(ii) \text{ basis: } p_0(x) = f(x_0)$$

- **Contoh:** Bentuklah tabel selisih untuk fungsi $f(x) = 1/(x+1)$ di dalam selang $[0.000, 0.625]$ dan $h = 0.125$. Hitung $f(0.300)$ dengan polinom Newton-Gregory maju derajat 3.

Penyelesaian:

Tabel selisih maju:

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
0.000	1.000	-0.111	0.022	-0.006
0.125	0.889	-0.089	0.016	-0.003
0.250	0.800	-0.073	0.013	-0.005
0.375	0.727	-0.060	0.008	
0.500	0.667	-0.052		
0.625	0.615			

Untuk memperkirakan $f(0.300)$ dengan polinom Newton-Gregory maju derajat tiga, dibutuhkan 4 buah titik. Ingatlah kembali bahwa galat interpolasi akan minimum jika x terletak di sekitar pertengahan selang. Karena itu, titik-titik yang diambil adalah

$$x_0 = 0.125, x_1 = 0.250, x_2 = 0.375, x_3 = 0.500$$

karena $x = 0.300$ terletak di sekitar pertengahan selang $[0.125, 0.500]$.

Diketahui

$$h = 0.125$$

dan

$$x = x_0 + sh \rightarrow s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.310 - 0.125}{0.125} = 1.4$$

Nilai $f(0.300)$ dihitung dengan polinom Newton-Gregory maju derajat tiga:

$$\begin{aligned} p_3(x) &\approx f_0 + \frac{s}{1!} \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f_0 \\ &\approx 0.889 + (1.4)(-0.089) + \frac{(1.4)(0.4)}{2} (0.016) + \\ &\quad \frac{(1.4)(0.4)(-0.6)}{6} (-0.003) \\ &\approx 0.889 - 0.1246 + 0.0045 \\ &\approx 0.769 \end{aligned}$$

Sebagai perbandingan, nilai sejati $f(0.300)$ adalah

$$f(0.300) = 1/(0.300+1) = 0.769$$

Manfaat Tabel Selisih Maju

- Misalkan kita membentuk tabel selisih untuk fungsi $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = x^3$ pada titik-titik x yang berjarak sama, yaitu $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

(i)

x	$f(x) = x$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	0	h	0	0
h	h	h	0	
$2h$	$2h$	h		
$3h$	$3h$			

(ii)

x	$f(x) = x^2$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	0	h^2	$2h^2$	0
h	h^2	$3h^2$	$2h^2$	0
$2h$	$4h^2$	$5h^2$	$2h^2$	
$3h$	$9h^2$	$7h^2$		
$4h$	$16h^2$			

(iii)

x	$f(x) = x^3$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0	h^3	$6h^3$	$6h^3$	0
h	h^3	$7h^3$	$12h^3$	$6h^3$	
$2h$	$8h^3$	$19h^3$	$18h^3$		
$3h$	$27h^3$	$37h^3$			
$4h$	$64h^3$				

- Pada ketiga tabel itu dapat disimpulkan bahwa untuk $f(x) = ax^n$, yang dalam hal ini $a = 1$ dan $n = 1, 2, 3$, diperoleh

$$\Delta^n f(x) = a n! h^n$$

dan

$$\Delta^{n+1}f(x) = 0$$

- Bila di dalam tabel selisih ditemukan Δ^k bernilai (hampir) konstan ($\neq 0$) maka polinom yang tepat menginterpolasi titik-titik itu adalah polinom berderajat k .
 - Pada contoh tabel (iii) di atas: Δ^3 konstan, jadi titik-titiknya tepat diinterpolasi dengan polinom derajat tiga (sama dengan fungsi aslinya, $f(x) = x^3$)
-

- Bagaimanakah jika tidak terdapat Δ yang bernilai tetap ?
Misalnya diberikan tabel selisih di bawah ini:

x	$f(x) = 1/x$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0.10	10.00	-5.00	3.33	-2.49	1.98
0.20	5.00	-1.67	0.83	-0.51	0.35
0.30	3.33	-0.83	0.33	-0.16	
0.40	2.50	-0.50	0.17		
0.50	2.00	-0.33			
0.60	1.67				

- Pada tabel selisih di atas, tidak ada Δ^k yang mendekati nilai tetap. Jadi $f(x) = 1/x$ tidak tepat dihampiri dengan polinom derajat 1, 2, 3, atau 4 di dalam selang $[0.10, 0.60]$.

- Tetapi jika selang datanya diperkecil dengan pengambilan h yang lebih kecil dan digunakan empat angka bena sebagai berikut:

x	$f(x) = 1/x$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0.25	4.000	-0.154	0.012	-0.003
0.26	3.846	-0.142	0.009	0.001
0.27	3.704	-0.133	0.010	-0.002
0.28	3.571	-0.123	0.008	
0.29	3.448	-0.115		
0.30	3.333			

- maka dari tabel ini ditemukan Δ^2 mendekati nilai tetap yaitu sekitar 0.010.
- Karena itu $f(x) = 1/x$ dapat dihamperi sebanyak empat angka bena dengan polinom kuadrat di dalam selang $[0.25, 0.30]$.

- ***Kesimpulan:***

Tabel selisih bermanfaat untuk menentukan

- Derajat polinom interpolasi
 - Selang data
 - Ketelitian yang diinginkan.
-

Polinom Interpolasi Newton-Gregory Mundur

- Polinom Newton-Gregory mundur (*Newton-Gregory backward*) dibentuk dari tabel selisih mundur.
- Polinom ini sering digunakan pada perhitungan nilai turunan (*derivative*) secara numerik. Titik-titik yang digunakan berjarak sama, yaitu

$$x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-n},$$

yang dalam hal ini,

$$x_i = x_0 + ih \quad , i = 0, -1, -2, \dots, -n$$

dan nilai x yang diinterpolasikan adalah

$$x = x_0 + sh \quad , s \in R$$

Sebagai contoh, tabel selisih mundur untuk 4 titik diperlihatkan oleh tabel berikut:

i	x_i	$f(x)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
-3	x_{-3}	f_{-3}			
-2	x_{-2}	f_{-2}	∇f_{-2}		
-1	x_{-1}	f_{-1}	∇f_{-1}	$\nabla^2 f_{-1}$	
0	x_0	f_0	∇f_0	$\nabla^2 f_0$	$\nabla^3 f_0$

Keterangan:

$$f_0 = f(x_0)$$

$$f_{-1} = f(x_{-1})$$

$$\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$$

$$\nabla f_{-1} = f_{-1} - f_{-2}$$

$$\nabla^2 f_0 = \nabla f_0 - \nabla f_{-1}$$

$$\nabla^{k+1} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}$$

Polinom Newton-Gregory mundur yang menginterpolasi $(n+1)$ titik data adalah

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_n(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{s+k-1}{s} \nabla^k f_0 \\ &= f_0 + \frac{s \nabla f_0}{1!} + \frac{s(s+1) \nabla^2 f_0}{2!} + \dots + \frac{s(s+1)(s+2) \dots (s+n-1) \nabla^n f_0}{n!} \end{aligned}$$

- **Contoh:** Diberikan 4 buah titik data dalam tabel berikut. Hitunglah $f(1.72)$ dengan
 - (a) polinom Newton-Gregory maju derajat 3
 - (b) polinom Newton-Gregory mundur derajat 3Misalkan jumlah angka bena yang digunakan adalah 7 digit.

Penyelesaian:

- (a) Polinom Newton-Gregory maju derajat 3

i	x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	1.7	0.3979849	-0.0579985	-0.0001693	0.0004093
1	1.8	0.3399864	-0.0581678	0.0002400	
2	1.9	0.2818186	-0.0579278		
3	2.0	0.2238908			

$$s = (x - x_0)/h = (1.72 - 1.70)/0.1 = 0.2$$

Perkiraan nilai $f(1.72)$ adalah

$$\begin{aligned} f(1.72) &\approx p_3(1.72) = 0.3979849 + 0.2(-0.0579985) + \frac{0.2(-0.8)}{2} (-0.0001693) \\ &\quad + \frac{0.2(-0.8)(-1.8)}{6} (0.0004093) \\ &= 0.3979849 - 0.0115997 + 0.0000135 + 0.0000196 \\ &= 0.3864183 \end{aligned}$$

(nilai sejati $f(1.72) = 0.3864185$, jadi $p_3(1.72)$ tepat sampai 6 angka bena)

(b) Polinom Newton-Gregory maju derajat 3

i	x_i	$f(x_i)$	∇	∇^2	∇^3
-3	1.7	0.3979849			
-2	1.8	0.3399864	-0.0579985		
-1	1.9	0.2818186	-0.0581678	-0.0001693	
0	2.0	0.2238908	-0.0579278	0.0002400	0.0004093

Tabel di atas memperlihatkan bahwa tabel selisih mundur sama dengan tabel selisih maju, yang berbeda hanya notasi dan penempatan elemennya.

$$s = (x - x_0)/h = (1.72 - 2.0)/0.1 = -2.8$$

Perkiraan nilai $f(1.72)$ adalah

$$\begin{aligned} f(1.72) \approx p_3(1.72) &= 0.2238908 - 2.8(-0.0579278) + \frac{(-2.8)(-1.8)}{2} (0.0002400) \\ &\quad + \frac{(-2.8)(-1.8)(-0.8)}{6} (0.0004093) \\ &= 0.2238908 + 0.1621978 + 0.0006048 - 0.0002750 \\ &= 0.3864183 \end{aligned}$$

- Adakalanya kita membutuhkan perkiraan nilai fungsi dengan dua peubah.
 - Fungsi dengan dua peubah, x dan y , secara umum dinyatakan sebagai
$$z = f(x, y)$$
 - Grafik fungsi z adalah berupa permukaan (*surface*) atau selimut kurva dengan alasnya adalah bidang x - y . Jadi, nilai-nilai z terletak pada permukaan tersebut.
-

- Jika z diinterpolasi dengan polinom dua-peubah (interpolasi dwimatra atau dua-dimensi), kita harus menentukan berapa derajat dalam arah- x dan berapa derajat dalam arah- y .
- Misalnya z dihampiri dengan polinom dua-peubah, yang dalam hal ini derajat 2 dalam arah- x dan derajat 3 dalam arah- y :

$$z = f(x, y) \approx a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 x^2 y + a_7 xy^2 + a_8 xy^3 + a_9 y^3 + a_{10} x^2 y^2 + a_{11} x^2 y^3$$

- Interpolasi polinom dua-peubah dilakukan dalam dua arah: dalam arah x dan dalam arah- y .
 - Pada setiap arah, kita harus memilih peubah yang dipegang konstan. Dalam arah- y , nilai x dipegang konstan, begitu juga dalam arah x , nilai y dipegang konstan.
 - Semua metode interpolasi yang telah dibahas sebelum ini dapat digunakan untuk menginterpolasi polinom dua-peubah.
-

- **Contoh:** Diberikan tabel $f(x,y)$ sebagai berikut:

$x \backslash y$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.5	0.165	0.428	0.687	0.942	1.190	1.431
1.0	0.271	0.640	1.003	1.359	1.703	2.035
1.5	0.447	0.990	1.524	2.045	2.549	3.031
2.0	0.738	1.568	2.384	3.177	3.943	4.672
2.5	1.216	2.520	3.800	5.044	6.241	7.379
3.0	2.005	4.090	6.136	8.122	10.030	11.841
3.5	3.306	6.679	9.986	13.196	16.277	19.198

Perkirakan nilai $f(1.6, 0.33)$ dengan polinom derajat 2 dalam arah- x dan derajat 3 dalam arah- y .

Penyelesaian: Kita menggunakan polinom Newton-Gregory maju untuk interpolasi dalam arah- x dan dalam arah y , karena titik-titiknya berjarak sama.

Dalam arah-y (x tetap):

	y	z	Δz	$\Delta^2 z$	$\Delta^3 z$
$x = 1.0$	0.2	0.640	0.363	-0.007	-0.005
	0.3	1.003	0.356	-0.012	
	0.4	1.359	0.344		
	0.5	1.703			
$x = 1.5$	0.2	0.990	0.534	-0.013	-0.004
	0.3	1.524	0.521	-0.017	
	0.4	2.045	0.504		
	0.5	2.549			
$x = 2.0$	0.2	1.5680	0.816	-0.023	-0.004
	0.3	2.384	0.793	-0.027	
	0.4	3.177	0.766		
	0.5	3.943			

Jarak antar titik dalam arah-y:

$$h = 0.1$$

dan

$$y = y_0 + sh \rightarrow s = \frac{y - y_0}{h} = \frac{0.33 - 0.2}{0.1} = 1.3$$

Polinom Newton-Gregory maju derajat tiga (dalam arah-y):

$$p_3(y) \approx f_0 + \frac{s}{1!} \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f_0$$

Untuk $x = 1.0$; $f(x, 0.33) \approx p_3(x, 0.33)$

$$\begin{aligned} p_3(x, 0.33) &\approx 0.640 + \frac{1.3}{1} (0.363) + \frac{(1.3)(1.3-1)}{2} (-0.007) + \frac{(1.3)(1.3-1)(1.3-2)}{6} (-0.005) \\ &= 1.1108 \end{aligned}$$

Untuk $x = 1.5$; $f(x, 0.33) \approx p_3(x, 0.33)$

$$\begin{aligned} p_3(x, 0.33) &\approx 0.990 + \frac{1.3}{1}(0.534) + \frac{(1.3)(1.3-1)}{2}(-0.013) + \frac{(1.3)(1.3-1)(1.3-2)}{6}(-0.004) \\ &= 1.6818 \end{aligned}$$

Untuk $x = 2.0$; $f(x, 0.33) \approx p_3(x, 0.33)$

$$\begin{aligned} p_3(x, 0.33) &\approx 1.568 + \frac{1.3}{1}(0.816) + \frac{(1.3)(1.3-1)}{2}(-0.023) + \frac{(1.3)(1.3-1)(1.3-2)}{6}(-0.004) \\ &= 2.6245 \end{aligned}$$

Dalam arah- x (y tetap):

x	z	Δz	$\Delta^2 z$
$y = 0.33 \left\{ \begin{array}{l} 1.0 \\ 1.5 \\ 2.0 \end{array} \right.$	1.1108	0.5710	0.3717
	1.6818	0.9427	
	2.6245		

Jarak antar titik dalam arah- x :

$$h = 0.5$$

dan

$$x = x_0 + sh \rightarrow s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.6 - 1.0}{0.5} = 1.2$$

Polinom Newton-Gregory maju derajat dua (dalam arah- x):

$$p_3(x) \approx f_0 + \frac{s}{1!} \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0$$

$$\begin{aligned} f(1.6, 0.33) &\approx p_3(1.6, 0.33) \approx 1.1108 + \frac{1.2}{1} (0.5710) + \frac{(1.2)(1.2-1)}{2} (0.3717) \\ &= 1.8406 \end{aligned}$$

Contoh Soal Terapan Interpolasi

Konsentrasi larutan oksigen jenuh dalam air sebagai fungsi suhu dan konsentrasi klorida diberikan dalam bentuk tabel berikut [CHA91]:

Suhu, °C	Konsentrasi larutan Oksigen (mg/L) untuk berbagai konsentrasi klorida	
	Klorida = 10 mg/L	Klorida = 20 mg /L
5	11.6	10.5
10	10.3	9.2
15	9.1	8.2
20	8.2	7.4
25	7.4	6.7
30	6.8	6.1

Dengan mengandaikan bahwa data pada tabel berketelitian cukup tinggi, pakailah metode interpolasi untuk menaksir konsentrasi oksigen yang larut untuk $T = 22.4\text{ }^{\circ}\text{C}$ pada konsentrasi klorida 10 mg/L dan 20mg/L. Gunakan metode interpolasi Lagrange.

Penyelesaian:

Konsentrasi Klorida = 10 mg/L

T	$C(T)$
5	11.6
10	10.3
15	9.1
20	8.2
25	7.4
30	6.8

Bila digunakan keenam titik data itu, maka polinom interpolasinya adalah polinom Lagrange derajat lima.

$$\begin{aligned}p_5(22.4) &= (11.6)L_0(22.4) + (10.3)L_1(22.4) + (9.1)L_2(22.4) + \\&\quad (8.2)L_3(22.4) + 7.4)L_4(22.4) + (6.8)L_5(22.4) \\&= 7.8125049876 \text{ mg/L}\end{aligned}$$

Konsentrasi Klorida = 20 mg/L

T	$C(T)$
5	10.5
10	9.2
15	8.2
20	7.4
25	6.7
30	6.1

Polinom interpolasi Lagrange:

$$\begin{aligned} p_5(22.4) &= (10.5)L_0(22.4) + (9.2)L_1(22.4) + (8.2)L_2(22.4) + \\ &\quad (7.4)L_3(22.4) + (6.7)L_4(22.4) + (6.1)L_5(22.4) \\ &= 7.0550200177 \text{ mg/L} \end{aligned}$$

Project

- Contoh soal 1 & pembahasan
 - Contoh soal 2 & pembahasan
 - Contoh soal 3 & pembahasan (additional)
 - Demo program
-

