Polinom Lagrange

Metode Numerik

Polinom Lagrange

Tinjau kembali polinom lanjar:

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_0)} (x - x_0)$$

Persamaan ini dapat diatur kembali sedemikian rupa sehingga menjadi

$$p_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk

$$p_1(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x)$$

yang dalam hal ini

$$a_0 = y_0 \quad , \quad L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

dan

$$a_1 = y_1 \quad , \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Bentuk umum polinom Lagrange derajat $\leq n$ untuk $(n + 1)$ titik berbeda adalah

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \ldots + a_n L_n(x)$$

yang dalam hal ini

$$a_i = y_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

dan,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Contoh: Hampiri fungsi $f(x) = \cos x$ dengan polinom interpolasi derajat tiga di dalam selang [0.0, 1.2]. Gunakan empat titik, $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.8$, dan $x_3 = 1.2$. Perkirakan nilai $p_3(0.5)$, dan bandingkan dengan nilai sejatinya.

Penyelesaian:

x_i	0.0	0.4	0.8	1.2
y_i	1.000000	0.921061	0.696707	0.362358

Polinom Lagrange derajat 3 yang menginterpolasi keempat titik di tabel adalah

$$p_3(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) + a_3 L_3(\mathrm{x})$$

$$= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$= 1.000000 \frac{(x-0.4)(x-0.8)(x-1.2)}{(0.0-0.4)(0.0-0.8)(0.0-1.2)} +$$

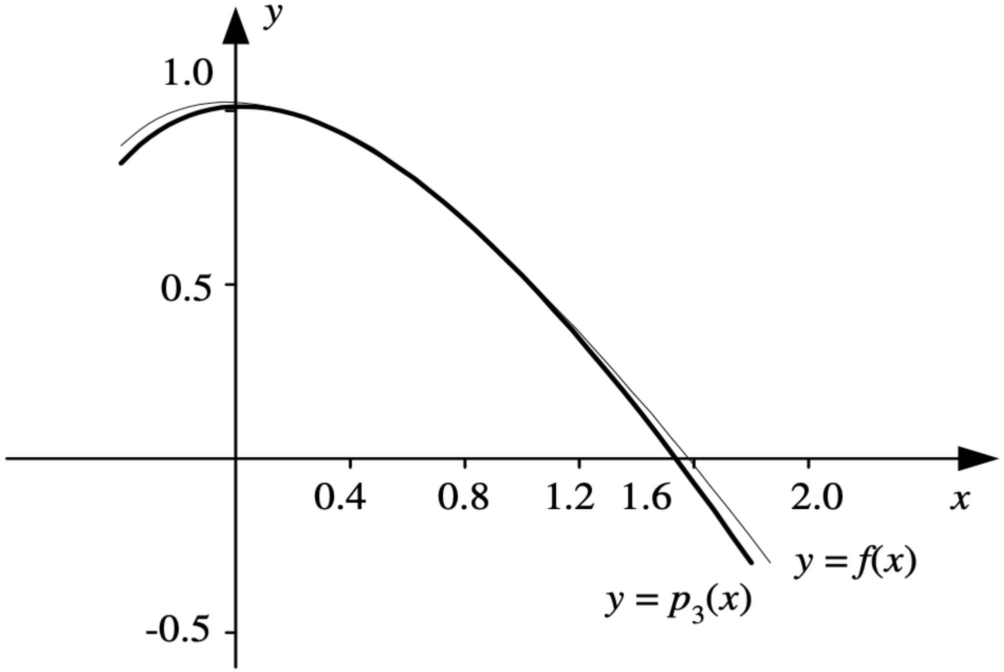
$$0.921061 \frac{(x-0.0)(x-0.8)(x-1.2)}{(0.4-0.0)(0.4-0.8)(0.4-1.2)} +$$

$$0.696707 \frac{(x-0.0)(x-0.4)(x-1.2)}{(0.8-0.0)(0.8-0.4)(0.8-1.2)} +$$

$$0.362358 \frac{(x-0.0)(x-0.4)(x-0.8)}{(1.2-0.0)(1.2-0.4)(1.2-0.8)}$$

$$p_3(x) = -2.604167(x-0.4)(x-0.8)(x-1.2) + 7.195789(x-0.0)$$
$$(x-0.8)(x-1.2) - 5.443021(x-0.0)(x-0.4)(x-1.2)$$
$$+0.943640(x-0.0)(x-0.4)(x-0.8)$$

Untuk mengurangi galat akibat pembulatan, polinom $p_3(x)$ ini tidak perlu disederhanakan lebih jauh. Kurva $y = \cos(x)$ dan $y = p_3(x)$ diperlihatkan pada Gambar berikut:



- Dengan menggunakan polinom interpolasi $p_3(x)$ itu kita dapat menaksir nilai fungsi di $x = 0.5$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
p_3(0.5) = {} & -2.604167(0.5 - 0.4)(0.5 - 0.8)(0.5 - 1.2) \\
& + 7.195789(0.5 - 0.0)(0.5 - 0.8)(0.5 - 1.2) \\
& -5.443021(0.5 - 0.0)(0.5 - 0.4)(0.5 - 1.2) \\
& + 0.943640(0.5 - 0.0)(0.5 - 0.4)(0.5 - 0.8) \\
= {} & 0.877221
\end{aligned}
$$

- Sebagai perbandingan, nilai sejatinya adalah $y = \cos(0.5) = 0.877583$

Contoh: Dari fungsi $y = f(x)$, diberikan tiga buah titik data dalam bentuk tabel:

x	1	4	6
y	1.5709	1.5727	1.5751

Tentukan $f(3.5)$ dengan polinom Lagrange derajat 2. Gunakan lima angka bena.

Penyelesaian:

Polinom derajat 2 $\rightarrow$ $n = 2$ (perlu tiga buah titik)

$$p_2(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + L_2(x)\, y_2$$

$$L_0(x) = \frac{(x-4)(x-6)}{(1-4)(1-6)} \quad \rightarrow L_0(3.5) = \frac{(3.5-4)(3.5-6)}{(1-4)(1-6)} = 0.083333$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-6)}{(4-1)(4-6)} \quad \rightarrow L_1(3.5) = \frac{(3.5-1)(3.5-6)}{(4-1)(4-6)} = 1.0417$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(6-1)(6-4)} \quad \rightarrow L_2(3.5) = \frac{(3.5-1)(3.5-4)}{(6-1)(6-4)} = -0.12500$$

Jadi,

$$\begin{aligned} p_2(3.5) &= (0.083333)(1.5709) + (1.0417)(1.5727) + (-0.12500)(1.5751) \\ &= 1.5723 \end{aligned}$$

```
function Lagrange(x:real; n:integer):real;
{ Menghitung y = pn(x), dengan p(x) adalah polinom Lagrange derajat n.
   Titik-titik data telah disimpan di dalam larik x[0..n] dan y[0..n]
}
var
  i, j  : integer;
  pi, L : real;
begin
  L:=0;
  for i:=0 to n do
   begin
      pi:=1;
      for j:=0 to n do
         if i<> j then
            pi:=pi*(x - x[j])/(x[i] - x[j]);
      {endfor}
      L:=L + y[i]*pi;
   end {for};
   Lagrange:=L;
end {Lagrange};
```