CONTINUOUS CONVOLUTION

Dr.- Ing. Dhidik Prastiyanto, S.T., M.T.

Vera Noviana Sulistyawan, S.T., M.T.

CT CONVOLUTION

- The (CT) convolution of the function x dan h, denoted $x * h$, is defined as the function

$$x * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- The convolution result $x * h$ evaluated at the point t is simply a weighted average of the function x, where the weighting is given by h time reversed and shifted by t.
- Herein, the asterisk symbol (i.e., "$*$") will always be used to denote convolution, not multiplication.
- As we shall see, convolution is used extensively in system theory.
- In particular, convolution has a special significance in the context of LTI systems.

PRACTICAL CONVOLUTION COMPUTATION

- To compute the convolution

$$x * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- We proceed as follows :
  1. Plot $x(\tau)$ and $h(t-\tau)$ as a function of τ
  2. Initially, consider an arbitrarily large negative value for t. This will result in $h(t-\tau)$ being shifted very far to the left on the time axis
  3. Write the mathematical expression for $x * h(t)$
  4. Increase t gradually until the expression for $x * h(t)$ changes form. Record the interval over which the expression for $x * h(t)$ was valid
  5. Repeat steps 3 and 4 until t is an arbitrarily large positive value. This corresponds to $h(t-\tau)$ being shifted very far to the right on the time axis
  6. The result for the various intervals can be combined in order to obtained an expression for $x * h(t)$ for all t

PROPERTIES OF CONVOLUTION

- The convolution operation is *commutative*. That is, for any two function x and h,

$$x * h = h * x$$

- The convolution operation is *associative.* That is, for any signals x, h_1, and h_2

$$(x * h_1) * h_2 = x * (h_1 * h_2)$$

- The convolution operation is *distributive* with respect to addition. That is, for any signals x, h_1, and h_2

$$x * (h_1 + h_2) = x * h_1 + x * h_2$$

REPRESENTATION OF SIGNALS USING IMPULSES

- For any function x

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x * \delta(t)$$

- Thus, any function x can be written in terms of an expression involving δ
- Moreover, δ is the convolutional identity. That is, for any function x

$$x * \delta = x$$

PERIODIC CONVOLUTION

- The convolution of two periodic functions is usually not well defined.
- This motivates an alternative notion of convolution for periodic signals known as periodic convolution.
- The periodic convolution of the T-periodic functions x and h, denoted $x \circledast h$, is defined as

$$x \circledast h(t) = \int_T x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Where $\int_T$ denotes integration over an interval of length T

PERIODIC CONVOLUTION

- The periodic convolution and (linear) convolution of the T −periodic function x and h are related as follows :

  $x \circledast h(t) = x_0 * h(t)$ where $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(t - kT)$

  (i.e., $x_0(t)$ equals $x(t)$ over a single period of x and id zero elsewhere)

CONTOH

Dua buah isyarat mempunyai rumusan sebagai berikut :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t\ lainnya \end{cases}$$

Dan

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 1 < t < 2 \\ 0 & t\ lainnya \end{cases}$$

Carilah sinyal $r(t)$ yang merupakan hasil konvolusi dua isyarat tersebut !

PENYELESAIAN

Untuk mencari nilai konvolusi kedua isyarat kontinyu digunakan :

$$r(t) = x(t) * h(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(p)h(t-p)dp$$

Pada rumus diatas dapat dilihat bahwa untuk mencari nilai $r(t)$ diperlukan sinyal $x(p)$ dan sinyal $h(t-p)$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t\ lainnya \end{cases}$$

Maka

$$x(p) = \begin{cases} 1 & 0 < p < 1 \\ 0 & p\ lainnya \end{cases}$$

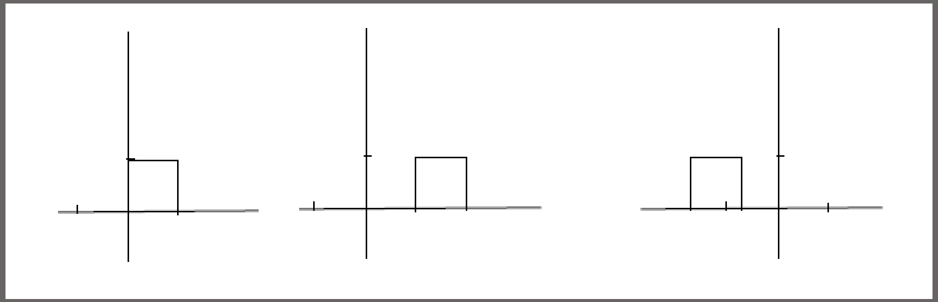
Sedangkan $h(t-p)$ dapat dicari sebagai berikut :

$$h(t-p) = \begin{cases} 1 & 1 < t-p < 2 \\ 0 & t-p\ lainnya \end{cases}$$

Yang dibutuhkan adalah fungsi h dalam p maka :

$$h(t-p) = \begin{cases} 1 & -2+t < p < -1+t \\ 0 & p\ lainnya \end{cases}$$

Untuk mempermudah diilustrasikan sebagai berikut :

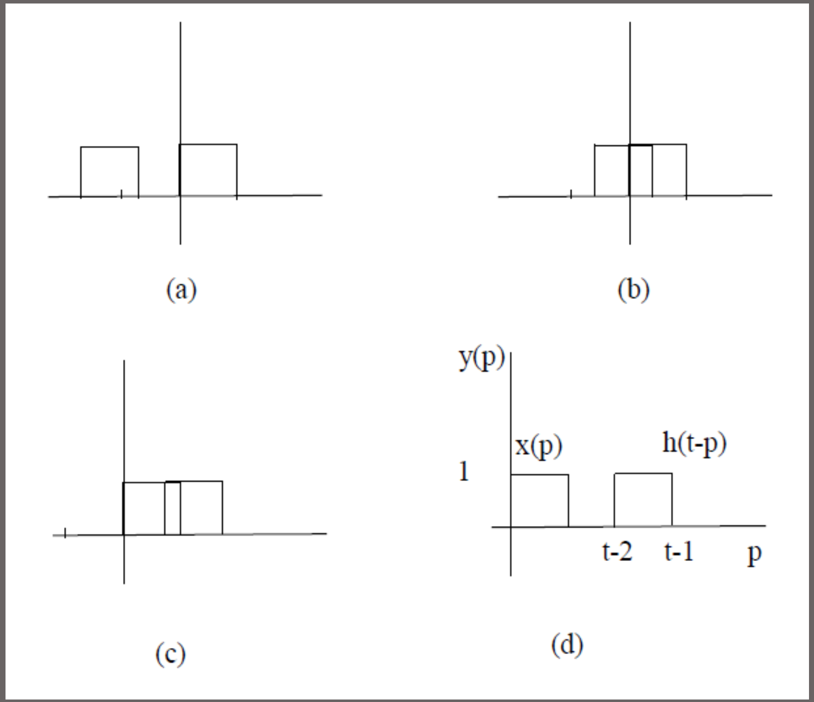


Gambar sinyal $x(p), h(p)$, dan $h(t-p)$

Pada gambar diatas sinyal $h(t-p)$ adalah sinyal $h(-p)$ yang tergeser sejauh t. Dari rumusan integral konvolusi dapat dilihat bahwa sinyal $h(-p)$ dijalankan dari $-\infty$ sampai $+\infty$. Nilai integral konvolusi dapat dibagi menjadi beberapa kasus penggal waktu t yaitu :

- Pada saat $t < 1$
- Pada saat $1 < t < 2$
- Pada saat $2 < t < 3$
- Pada saat $t > 3$

Untuk memperjelas keempat kasus tersebut $x(p)$ dan $h(t-p)$ digambarkan dalam satu sumbu $y(p)$



a. Sinyal $x(p)$ dan $h(t-p)$ pada saat $t < 1$

b. Sinyal $x(p)$ dan $h(t-p)$ pada saat $1 < t < 2$

c. Sinyal $x(p)$ dan $h(t-p)$ pada saat $2 < t < 3$

d. Sinyal $x(p)$ dan $h(t-p)$ pada saat $t > 3$

Hasil konvolusi $r(t)$ pada tiap penggal waktu tersebut adalah sebagai berikut :

- Pada saat $t < 1$

Pada periode ini sinyal $h(t-p)$ belum sampai ke titik awal $x(p)$ maka :

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(p)h(t-p)dp$$

$$r(t) = 0$$

- Pada saat $1 < t < 2$ batasan bawah integral konvolusi berdasar gambar (b) adalah o dengan batas atas $t - 1$

$$r(t) = \int_{0}^{t-1} x(p)h(t-p)dp$$

$$r(t) = \int_{0}^{t-1} (1)(1)dp$$

$$r(t) = t - 1$$

- Pada saat $1 < t < 2$ batasan bawah integral konvolusi berdasar gambar (b) adalah o dengan batas atas $t - 1$

$$r(t) = \int_{0}^{t-1} x(p)h(t-p)dp$$

$$r(t) = \int_{0}^{t-1} (1)(1)dp$$

$$r(t) = t - 1$$

- Pada saat $2 < t < 3$ batasan bawah integral konvolusi berdasar gambar (c) adalah $t - 2$ dengan batas atas $t - 1$

$$r(t) = \int_{t-2}^{1} x(p)h(t-p)dp$$

$$r(t) = \int_{t-2}^{1} (1)(1)dp$$

$$r(t) = 1 - (t - 2) = 3 - t$$

- Pada saat $t > 3$

Pada waktu ini $h(t-p)$ sudah meninggalkan batas akhir $x(p)$ sehingga :

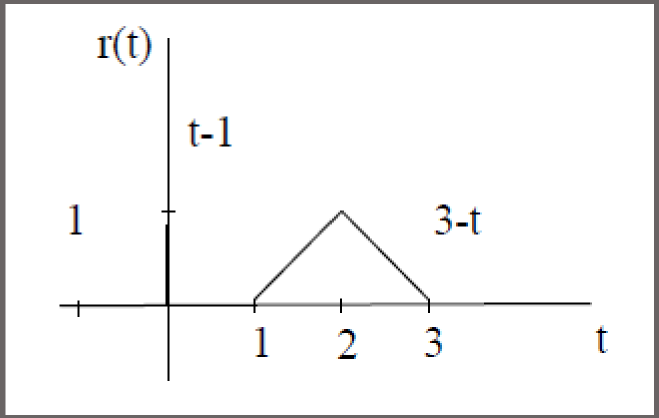
$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(p)h(t-p)dp$$

$$r(t) = 0$$

Dengan demikian hasil konvolusi secara keseluruhan adalah sebagai berikut :

$$r(t) = \begin{cases} t-1 & 1 < t < 2 \\ 3-t & 2 < t < 3 \\ 0 & t \; lainnya \end{cases}$$

Gambar sinyal $r(t)$ hasil konvolusi $x(t)$ dan $h(t)$ adalah sebagai berikut :



THANK YOU.
ANY QUESTIONS ?